



جامعة الإسكندرية  
ALEXANDRIA  
UNIVERSITY  
كلية التجارة  
FACULTY OF COMMERCE



# الأساليب الكمية في مجال الإدارة المفاهيم والتطبيقات العلمية

دكتور  
أشرف سلطان  
أستاذ إدارة الأعمال المساعد  
كلية التجارة - جامعة الإسكندرية

[www.facebook.com/Econlibrary](http://www.facebook.com/Econlibrary)



مكتبة الاقتصاد Economics Library

2019

الفصل الدراسي الثاني

الفرقة الثالثة

[www.comm.alexu.edu.eg](http://www.comm.alexu.edu.eg) E-mail: [comr-dean@alexu.edu.eg](mailto:comr-dean@alexu.edu.eg)

كليتك تتغير ... شارك في التغيير



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## إهداء

إلى والدي ووالدتي .....  
رمزا العطاء المستمر ..... وفاءً وإجلالاً ....  
إلى زوجتي ..... قرة عيني .....  
إلى أبنائي الأحباء .... أحمد و محمود  
ربي احفظهم جميعاً



## مقدمة

لاشك أن نجاح واستمرار المنظمات أياً كان مجال نشاطها (صناعي، زراعي، تجاري، خدمي.....) يتوقف على مدى سلامة المنطقية المترتبة على إتباع المنهج العلمي أو الطريقة العلمية لحل المشكلات واتخاذ القرارات.

ومع كبر حجم المشروعات وزيادة رؤوس أموالها وتعدد أقسامها وفروعها، ومن ثم وظائفها، وتنوع المنتجات، وظهور المنافسة وتعدد أطرافها (محلية، وأجنبية)، فقد أصبحت المشاكل التي تواجه تلك المشروعات ذات طبيعة خاصة من ناحية تعدد الأهداف المطلوب تحقيقها وكثرة وتباين المتغيرات الخاصة بكل مشكلة وظهور عدم التأكد، ولهذا أصبحت عملية حل المشكلات واتخاذ القرارات أصعب وأعقد من ذي قبل.

الأمر الذي يقضي بضرورة حدوث تطور نحو استخدام الأساليب الكمية في ترشيد الإدارة عند قيامها بوظائفها المتجسدة في التخطيط ورسم السياسات واتخاذ القرارات والرقابة وتقييم الأداء، مع ضرورة المام المعنيين بالعمل الإداري بالأساليب الكمية حتي يتسني لهم الاستفادة منها في معالجة المشاكل الإدارية وحلها من خلال منهج علمي منظم ومتكامل.

ولقد لعب ظهور الحاسبات الآلية وما رافقها من النمو السريع في استخداماتها في المجال الإداري والصناعي دوراً كبيراً في تطوير وإبراز أهمية استخدام الأساليب الكمية والاستفادة منها خاصة في معالجة المشاكل المعقدة والمكلفة اقتصادياً.

ويتناول هذا الكتاب بالدراسة والتحليل أهم الأساليب الكمية الأكثر شيوعاً في مجال الإدارة، حيث سيتم تناول أسلوب البرمجة الخطية، وأسلوب تحليل سلاسل ماركوف، ونظرية القرارات، ونظرية المباريات، وتحليل نماذج شبكات الأعمال، وأخيراً نظرية صفوف الانتظار.

ويأمل المؤلف أن يفيد هذا الكتاب كل الباحثين والدارسين وكذلك العاملين في مجال الإدارة.

وعلي الله قصد السبيل ،،،،،،،،

" رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ "

" صدق الله العظيم "

المؤلف

د. أشرف سلطان



## الفصل الأول

### ماهية وطبيعة الأساليب الكمية

- مقدمة.
- مفهوم المدخل الكمي والأساليب الكمية.
- الأساليب الكمية وبناء النماذج.
- مراحل مدخل التحليل الكمي.
- الأساليب الكمية المستخدمة في المجال الإداري.

## ماهية وطبيعة الأساليب الكمية

### مقدمة:

ساهم كبر حجم المشروعات وما رافقة من تعدد وتعارض في الأهداف وكثرة البدائل المصاحبة لاتخاذ القرار الواحد في جعل إدارة هذه المشروعات عملية معقدة وصعبة.

ويعتبر المدخل الكمي أحد المداخل الحديثة للإدارة المعاصرة، ويطلق على هذا المدخل العديد من المسميات منها الأسلوب المعيارى، أو علم اتخاذ القرار Decision Making Science، أو علم الإدارة Management Science، أو علم بحوث العمليات Operation Research Science.

وتعتمد الأساليب الكمية على استخدام مدخل التحليل الكمي في عملية اتخاذ القرارات الإدارية، وذلك لمساعدة متخذ القرار في التوصل إلى أحسن حل ممكن (الحل الأمثل) للمشكلة موضع القرار من خلال التحليل العلمى المنظم للبدائل المتاحة وبيان الآثار المحتملة لها.

### مفهوم المدخل الكمي والأساليب الكمية:

يمكن تعريف المدخل الكمي بأنه "أسلوب دراسة أو منهج معين للتحليل والمقارنة يستخدم البيانات والمعلومات الرقمية والأساليب الكمية في دعم عملية اتخاذ القرار سعياً وراء حل مشكلة ما".

وبناء على ذلك فإن المدخل الكمي في الإدارة يعتمد في معالجة وحل المشكلات الإدارية على استخدام النماذج والأساليب الرياضية، حيث يكون من الأفضل في كثير من الأحيان اللجوء إلى استخدام هذه النماذج والأساليب لاتخاذ القرارات المناسبة لمواجهة وحل المشكلات الإدارية.



وتعتبر الأساليب الكمية حقل واسع يتضمن كافة المداخل الرشيدة Approaches Rational لعملية صنع القرارات الإدارية اعتماداً على استخدام الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة.

ومن الشروط المهمة التي يستلزم توافرها في المشكلة التي تجعل استخدام مدخل التحليل الكمي مفيداً في عملية اتخاذ القرارات ما يلي:

- 1- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع مهم، وعلى هذا الأساس فإن المدير متخذ القرار يرغب في إجراء تحليل شامل قبل عملية اتخاذ القرار.
- 2- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع معقد، حيث لا يستطيع متخذ القرار تطوير أو تنمية حل جيد لها بدون مساعدة المحلل الكمي.
- 3- يجب أن تكون المشكلة ذات طابع جديد، حيث لا يتوافر لدى المدير متخذ القرار أي خبرة سابقة يستطيع القياس عليها.
- 4- يجب أن تكون المشكلة في أحيان أخرى ذات طابع متكرر، حيث أن الاعتماد على الأساليب الكمية في حالات اتخاذ القرارات الروتينية والمتكررة ينتج عنه اقتصاد كبير في جهد ووقت المدير متخذ القرار.

ويعتبر مدخل التحليل الكمي في كثير من الأحيان هو المدخل الأفضل لمواجهة وحل المشكلات الإدارية، حيث توجد الكثير من الحالات التي يمكن اعتبارها بمثابة مبررات تؤكد على ضرورة استخدام هذا المدخل الكمي في مواجهة وحل المشكلات الإدارية، ومن أهم هذه الحالات:

- 1- إذا كانت المشكلة موضع البحث والتحليل بالغة في الصعوبة والتعقيد.
- 2- إذا كانت بيئة اتخاذ القرار تؤكد على ضرورة الاتجاه نحو تحقيق أهداف كمية محددة.
- 3- إذا توفر لدى متخذ القرار المعرفة والخبرة والدراية على تطبيق نماذج وأساليب التحليل الكمي.



4- إذا تولد لدى متخذ القرار الشعور بأنه لا يستطيع الوصول إلى حل للمشكلة دون استخدام النماذج والأساليب الكمية.

5- إذا كانت البيانات والمعلومات الخاصة بالمشكلة ذات طبيعة رقمية كمية.

### الأساليب الكمية وبناء النماذج:

يتطلب استخدام الأساليب الكمية بناء النماذج، وتعتبر عملية بناء واستخدام النماذج جوهر الأساليب الكمية، خاصة في حل المشاكل غير الروتينية. ويمكن تعريف النموذج بأنه "تصوير للواقع بغية توضيح أحد مظاهر الطريقة التي يعمل بها هذا الواقع".

ويمكن أيضاً تعريف النموذج على أنه "محاكاة أو تقريب للواقع من خلال علاقات مفترضة وملحوظة".

وهكذا نجد أن النماذج تعتبر تمثيلاً مبسطاً وتلخيصاً للواقع أى أنها تجريد أو تعبير عن الواقع. وعادة ما يكون النموذج أقل تعقيداً من الواقع، هذا وينبغي أن يكون هذا النموذج كاملاً بدرجة كافية تسمح بتقريب مظاهر الواقع التي تقع تحت الملاحظة والبحث والتحليل.

ويمكن تقسيم النماذج إلى أربعة أنواع وهي:

1- النماذج المادية أو الطبيعية: وهي النماذج التي تشبه الشيء الحقيقي

وتسلك نفس سلوكه ومن أمثلتها الكرة الأرضية فهي تعد نموذجاً مشابهاً للأرض، وفي الغالب يكون حجم النموذج إما أصغر من الواقع أو أكبر منه، ففي حالة الكرة الأرضية هي أصغر كثيراً من الأرض ولكنها تماثلها في الشكل وفي أحجام القارات والمحيطات.

2- النماذج المناظرة أو المماثلة A Nalog Models : وهي النماذج التي

تتكون من أشياء مادية لا توجد في الواقع، ومن أمثلة ذلك النوع مقاييس درجات الحرارة المختلفة. أى هذه النماذج لا تعبر عن شكل النظام



المطلوب تمثيلة وإنما توضع سلوك ذلك النظام، ومن هذه النماذج الخرائط والرسوم البيانية وخرائط التدفق.

3- النماذج المعيارية Normative Models: حيث قد تكون النماذج وصفية تسعى إلى وصف الحقائق والعلاقات مثل نماذج صفوف الانتظار ونماذج المحاكاة، كما قد تكون النماذج معيارية تسعى إلى وصف ما يجب أن يكون مثل البرمجة الخطية.

4- النماذج الرياضية أو الرمزية Mathematical or Symbolic Models: وهي عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات يؤدي حلها إلى تفسير سلوك ظاهرة معينة أو التوقع بالتغيرات الخاصة بها. ويمكن تصنيف النماذج الرياضية أو الرمزية إلى ثلاثة أنواع وهي:

أ- النماذج المحددة (المؤكدّة) Deterministic Models:

وهي النماذج التي تكون فيها قيم متغيرات النموذج معروفة بشكل مؤكد وثابت بحيث يتم الوصول إلى نفس المخرجات باستخدام مجموعة من المدخلات وذلك مهما تكرر الحل في النموذج عدة مرات. هذا ويتم تقسيم هذه النماذج إلى قسمين أساسيين كما يلي:

- النماذج الخطية: وهي التي تأخذ العلاقة بين متغيراتها موضع الدراسة شكل العلاقة الخطية المستقيمة، ومن أهم الأساليب الكمية المنتمية لهذه النماذج: البرمجة الخطية، وأسلوب النقل، ونموذج التخصيص، وأسلوب البرمجة بالأعداد الصحيحة، وأسلوب برمجة الأهداف، وأسلوب المسار الحرج وأسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت).

- النماذج غير الخطية: وهي التي تأخذ العلاقة بين متغيراتها موضع الدراسة شكل العلاقة غير الخطية أي تكون العلاقة من الدرجة الثانية أو من درجة



أعلى من ذلك، ومن أمثلة الأساليب الكمية المنتمية لهذه النماذج: أساليب البرمجة غير الخطية مثل البرمجة الهندسية.

### ب- النماذج الاحتمالية Probabilistic Models:

وهي النماذج التي تأخذ في حساباتها ظروف عدم التأكد، وهي تلك النماذج التي تعطي مجموعات مختلفة من النواتج تكون موزعة توزيعاً احتمالياً مع تكرار حلها، وتتمثل أهم الأساليب الكمية التي تنتمي إلى هذه النماذج: أسلوب البرمجة الاحتمالية، وأسلوب نظرية المباريات، وأسلوب نظرية القرار، ونماذج صفوف الانتظار.

### ج- النماذج المختلطة:

تجمع هذه النماذج بين النماذج المحددة (المؤكد) والنماذج الاحتمالية، حيث يتم معالجة بعض نماذج الأساليب الكمية في بعض الحالات باعتبارها نماذج محددة، كما يتم معالجتها في حالات أخرى باعتبارها نماذج احتمالية. وتتمثل أهم هذه الأساليب التي تنتمي إلى هذه النماذج المختلطة في: أسلوب إدارة المخزون، وأسلوب البرمجة الديناميكية، وأسلوب المحاكاة، وأسلوب بيرت.

### مراحل مدخل التحليل الكمي:

يتم استخدام مدخل التحليل الكمي في معالجة وحل المشكلات الإدارية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

#### الخطوة الأولى: تحديد المشكلة الإدارية:

وذلك من خلال التعرف على المشكلة وتحليلها بشكل واضح، ويقتضى ذلك ضرورة تحديد الأهداف المراد تحقيقها وكذلك البدائل المتاحة لتحقيقها أمام متخذ القرار، وتحديد المتغيرات التي يمكن التحكم فيها وتلك التي يصعب التحكم فيها، وتحديد القيود المفروضة على الموارد المتاحة.



**الخطوة الثانية: بناء أو صياغة النموذج الكمي المراد استخدامه لحل المشكلة:** بعد الإنتهاء من الخطوة الأولى تأتي مرحلة تحديد (صياغة) النموذج الكمي الملائم الذى سيستخدم فى حل المشكلة. وفي الغالب سيكون النموذج الرياضى أو الرمزى هو النوع المستخدم لحل المشاكل الإدارية، والذى سيتضمن مجموعة من المعادلات تمثل الهدف والقيود (معبراً عنها بمتباينات يتم تحويلها إلى معادلات) ويتم عرض ذلك فى صورة نموذج رياضى متكامل.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أنه يجب اختيار النموذج الكمي المناسب لطبيعة المشكلة والذى يتلائم مع طبيعة العلاقات الرياضية التى تربط بين كافة متغيرات وثوابت المشكلة المراد حلها وذلك سعياً للوصول إلى الحل الأمثل لها.

**الخطوة الثالثة: إيجاد الحل الأمثل:** ويتم التوصل إلى الحل الأمثل من خلال حل النموذج الكمي الذى تم تكوينه، وذلك بهدف التوصل إلى القيم المثلى التى تحقق الأهداف المرغوبة وبأعلى مستوى ممكن. ويجب الأخذ فى الحسبان أن الحل الأمثل سوف يأتي فى ضوء الظروف التى يتطلب هذا النموذج الكمي ضرورة افتراضها، حيث يتم التوصل فى مثل هذه الحالة إلى مخرجات محددة نتيجة لذلك. ومما هو جدير بالذكر أن طرق الحل المستخدمة فى حل النموذج الكمي تختلف باختلاف النماذج المستخدمة.

**الخطوة الرابعة: اختبار أو تقييم النموذج الكمي المستخدم:** بعد أن يتم تحديد وصياغة النموذج الرياضى لحل مشكلة ما، فإنه من الأمور الهامة التأكد من صلاحية هذا النموذج، ويستخدم فى ذلك عدة طرق منها طريقة الفحص من واقع الماضى وتعتمد تلك الطريقة على استخدام بيانات ماضية أو فعلية خاصة بمشكلة ما وتطبيق النموذج فى حل هذه المشكلة ومقارنة نتائج الحل بالنتائج الفعلية المعروفة من قبل. وتهدف هذه الخطوة إلى تحديد ما إذا كانت الأرقام



التي نتجت من الحل باستخدام النموذج الرياضي واقعية ومقبولة من قبل الإدارة أم لا، وإلا سوف يصبح الحل الذي تم التوصل إليه ليس له جدوى.

**الخطوة الخامسة: تطبيق الحل أو تنفيذ النموذج:** إذا ثبت صحة وواقعية الذي تم التوصل إليه باستخدام النموذج الكمي المستخدم، وتبين أن هذا الحل قابل للتطبيق، وبالتالي أصبح مقبولاً تماماً من الإدارة، فإن الأمر يتطلب ضرورة العمل على تطبيق هذا الحل للاستفادة منه في علاج وحل المشكلة الإدارية موضع الدراسة والبحث والتحليل. ويتم تنفيذ النموذج من خلال عرض نتائج الحل في صورة تعليمات واضحة وتوصيلها إلى المسؤولين لتنفيذها، وهذا الأمر يقتضى ضرورة وجود تعاون وقنوات اتصال بين خبراء الأساليب الكمية والقائمين بالتنفيذ.

**الخطوة السادسة: تعديل النموذج:** تم بناء النموذج الكمي وتحديد نوعه في ظل ظروف معينة وبناء على فروض محددة وطالما ظل المناخ الذي صمم النموذج في ظله سائداً كلما ظل النموذج صالحاً للاستخدام، وفي حالة حدوث أى تغيير في فروض اعداد النموذج أو بيئة ومناخ العمل فإن الأمر يقتضى ضرورة تعديل النموذج ليتمشى مع الفروض والمتغيرات الجديدة. ويوضح الشكل التالى رقم (1-1) مراحل مدخل التحليل الكمي:





### شكل رقم (1-1): مراحل مدخل التحليل الكمي

وتجدر الإشارة في هذا الصدد إلى أن هناك عدة أمور يجب مراعاتها عند بناء النموذج الكمي سواء كان ذلك في مرحلة صياغة النموذج أو في مرحلة الحصول على النتائج وتنفيذ النموذج.

**ففي مرحلة صياغة النموذج الكمي يجب:**

- 1- اختيار النموذج الكمي المناسب للمشكلة محور الدراسة.
- 2- عدم المبالغة في التجريد أو التمثيل مع مراعاة العناصر الرئيسية للنظام أو المشكلة محور الدراسة والعناصر غير الرئيسية.
- 3- يجب مراعاة الدقة عند إعداد البيانات اللازمة لتشغيل النموذج.
- 4- ضرورة مراعاة الدقة عند إعداد المعادلات وحلها.



أما في مرحلة الحصول على نتائج النموذج الكمي وتنفيذه فيجب:

- 1- اختبار صلاحية النموذج قبل تنفيذه.
- 2- ضرورة تفسير نتائج النموذج في ضوء الهدف أو الأهداف التي من أجلها تم بناء واستخدام ذلك النموذج.
- 3- ضرورة مراعاة وأخذ خبرة ورأى متخذ القرار وعدم تجاهل ذلك الأمر مهما بلغت دقة النموذج وإمكانياته.

الأساليب الكمية المستخدمة في المجال الإداري:

يعتمد استخدام الأساليب الكمية في المجال الإداري في القيام بدورها وتحقيق أهدافها على مجموعة من الأساليب أو النماذج مثل:

1- البرمجة الخطية: وتستخدم في حل مشاكل تخصيص الموارد النادرة، ويتكون النموذج الرياضي للبرمجة الخطية من دالة هدف، ومجموعة من القيود، بالإضافة إلى شرط عدم السالبية وذلك بهدف تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. ويتم تطبيق هذا النموذج للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة محور الدراسة، ويشترط لتطبيق نموذج البرمجة الخطية أن تكون العلاقات خطية بين متغيرات الدراسة، وضرورة تحقيق هدف واحد، وتوفر عدة بدائل لحل المشكلة، وضرورة وجود قيود ثابتة، وندرة الموارد، وأخيراً إمكانية القياس الكمي للمتغيرات المستخدمة.

2- نماذج تحليل شبكات الأعمال: وهي من النماذج التي تستخدم لحل كثير من المشاكل التي تواجه المشروعات أياً كانت طبيعة نشاطها مثل مشكلة تحديد الحد الأدنى للوقت المتوقع لإتمام المشروع، ومشكلة تخطيط وتقييم ومراجعة البرامج ويستخدم في ذلك أسلوب بيرت Pert، وتتمثل نماذج تحليل شبكات الأعمال في أسلوب المسار الحرج CPM وبيرت Pert وتستخدم في جدولة ومتابعة تنفيذ المشروعات وتحليل العلاقة بين وقت وتكاليف تنفيذ



المشروعات وتحديد كيفية تخفيض وقت إتمام المشروع وتخفيض تكاليف تنفيذ المشروع إلى الحد الأدنى.

3- تحليل سلاسل ماركوف: هي إحدى أساليب بحوث العمليات التي تبحث في تحليل التغيرات الحالية لمتغير عشوائى وذلك بهدف التنبؤ بالتغيرات المستقبلية لهذا المتغير. وعند استخدام تحليل سلاسل ماركوف يجب أولاً معرفة الحالة الحالية وهي آخر حدث تم في الفترة السابقة مباشرة، وثانياً معرفة التحركات الاحتمالية والتي هي عبارة عن احتمالات التحرك أو التغير بين الحالات الممكنة.

4- نظرية المباريات: هي عبارة عن تكتيك يستخدم عند الرغبة في اتخاذ القرارات التي تتطلب أخذ إستراتيجيات الأطراف الأخرى ذوى المصالح المتعارضة في الاعتبار. أى أن نظرية المباريات ماهى إلا أداة من الأدوات الرياضية التي تساهم بشكل كفاء وفعال في حل المشكلات أو المواقف التي تتميز بالصراع والتي تواجه متخذى القرارات وذلك عند قيامهم بالبحث عن الإستراتيجيات المثلى سواء أكانت إستراتيجيات الخصم معروفة لديهم أو غير معروفة.

5- نظرية القرار: وتهتم نظرية القرار بصفة أساسية ببيان كيفية مساعدة متخذ القرار في صنع واتخاذ القرارات في ظل بيئة معينة، بحيث تمكنه من تحليل مجموعة من المواقف والتي تشتمل على العديد من النواتج والبدائل المختلفة، كما تقدم أيضاً لمتخذ القرار الأساليب الرشيدة التي تساعد على الاختيار السليم للبديل المناسب خلال عملية اتخاذ القرار. وفي ضوء ذلك يمكن القول أن نظرية القرار تستخدم لتحديد الإستراتيجية المثلى عندما يواجه متخذ القرار عدة بدائل يمكن استخدامها لحل مشكلة ما، وخاصة إذا كانت عملية اتخاذ القرار تتم في بيئة الخطر أو عدم التأكد.



**6- نظرية صفوف الانتظار:** وتهدف نظرية صفوف الانتظار إلى تخفيض الوقت للعملاء طالبي الخدمة، وأيضاً لوحداث أداء الخدمة، وتجنب ضياع الوقت في مراكز العمل. وتظهر مشكلة الانتظار لعدم توافق معدل أداء الخدمة مع معدل وصول العملاء. فإذا كان معدل وصول العملاء سريعاً بدرجة أكبر من معدل أداء الخدمة للعميل الواحد فإن ذلك يترتب عليه ضرورة انتظار العملاء وتعطيلهم مما يمكن أن يؤثر سلبياً في نتائج أعمالهم وفي استمرار تعاملهم مع المنظمة. ومن أمثلة صفوف الانتظار التي نراها في حياتنا السيارات أمام محطات البنزين، وعملاء البنك أمام منافذ صرف الشيكات.

**7- أسلوب المحاكاة:** هو أسلوب لدراسة وتعلم نظام حقيقي عن طريق إخضاعه للتجربة بنموذج آخر يمثل هذا النظام ويتضمن التعبيرات الرياضية والعلاقات المنطقية التي تصف كيفية حساب قيمة مخرجات هذا النظام بمعلومية قيم المدخلات الخاصة به والتي تتضمن نوعين أساسيين يتمثل أحدهما في المدخلات التي يمكن التحكم فيها، بينما يتمثل النوع الثاني في المدخلات الأخرى الإحصائية. ويعتمد أسلوب المحاكاة بصفة أساسية على فكرة محاكاة أو تقليد نظام ما يصبح موضعاً للدراسة والتحليل وذلك عن طريق تحديد صورة طبق الأصل لهذا النظام توضح أدائه وتبين التفاعلات المختلفة التي تجرى بين عناصره دون المساس بالنظام نفسه.

**8- برمجة الأهداف:** وتستخدم لحل المشكلة التي تتسم بتعدد وتعارض الأهداف وعدم تجانس وحدات قياس كل هدف ويهدف هذا الأسلوب إلى تخفيض الانحرافات غير المرغوبة إلى أدنى حد ممكن، كما أنه يصل إلى أفضل حل مرض، ويتم تحديد أولويات بين الأهداف المطلوب تحقيقها.

9- البرمجة الديناميكية: وتستخدم في حل المشاكل متعددة المراحل حيث يكون لكل قرار في مرحلة معينة أثر على المرحلة التالية، كما أنها تستخدم في حالة ما إذا كانت العلاقات بين المتغيرات غير خطية.





## الفصل الثانى

### البرمجة الخطية / الطريقة البيانية

#### Linear Programming – Graphical Method

- مقدمة.
- تعريف البرمجة الخطية.
- الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية.
- تكوين نموذج البرمجة الخطية.
- الحل البيانى لمشكلة البرمجة الخطية:
  - أولاً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تعظيم الربح.
  - ثانياً: استخدام الأسلوب البيانى فى حل مشكلة تدنية التكاليف.
- تمارين للتدريب.



## البرمجة الخطية/ الطريقة البيانية

### مقدمة:

طورت البرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية وتم استخدامها آنذاك في معالجة مشاكل التخطيط في السلاح الجوي الأمريكى، وفيما بعد أخذت طريقها في المجالات المختلفة وأصبحت أداة مهمة لمساعدة المديرين في عملية اتخاذ القرارات.

فمن المعلوم أن أى منظمة تزاوّل نشاطها وتحقق أهدافها من خلال استخدام مجموعة من الموارد المتاحة لديها، وعادة ما تواجه المنظمة مشكلة أساسية وهي ندرة الموارد المتاحة، وتتضح تلك المشكلة نتيجة عدم كفاية الكميات المتاحة من الموارد لتحقيق الأهداف المطلوبة أو الاستخدامات البديلة، وهنا تظهر مشكلة كيفية الوصول إلى الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة. ولمعالجة هذه المشكلة بطريقة علمية وسليمة، فإن المنظمة تستخدم نموذج البرمجة الخطية Linear Programming وهو أسلوب رياضى يساعد في التغلب على أو مواجهة مشكلة تخصيص الموارد والوصول إلى الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة المحدودة، بحيث يتم تحقيق أكبر أرباح ممكنة أو تحمل أقل تكاليف ممكنة.

ويستخدم نموذج البرمجة الخطية في حل مشاكل التوزيع الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات المختلفة. ويعد أسلوب البرمجة الخطية من أكثر الأساليب الكمية انتشاراً سواء في الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العملية. وقد ثبت استخدام أسلوب البرمجة الخطية في معالجة غالبية المشاكل التي يتعرض لها مدير الإنتاج والعمليات، ومن أمثلة هذه المشاكل:

- عمل خطة توزيع مثلى يتم فيها تحديد الكميات من المنتج النهائى أو الكميات من المادة الخام الواجب نقلها من المصادر المختلفة إلى جهات

الاستخدام المتعددة وهو ما يعرف بمشاكل النقل وذلك لتدنية تكاليف النقل وتحقيق أعلى كفاءة توزيعية ممكنة.

- مشكلة تحديد تشكيلة المنتجات، وجدولة الانتاج، وتخطيط المخزون السلعي لمقابلة الطلب المتوقع مستقبلاً.

- مشكلة توزيع الموارد الإنتاجية (المادة الخام، الآلات، العمالة ... الخ) على منتجات مختلفة بهدف تحديد التوليفة المثلى من المنتجات التي تحدد الكمية الواجب انتاجها من كل منتج.

- مشكلة اختيار أفضل طريقة لتخطيط الاستثمارات وتحديد نوع الاستثمار المناسب من بين البدائل الاستثمارية المتاحة بحيث يكون عائد الاستثمار أعلى ما يمكن.

- مشكلة تخصيص الآلات لمهام معينة أو تخصيص العمال مختلفي المهارة والكفاءة على الاقسام أو الآلات المتاحة بحيث يتحقق أقصى كفاءة في الاستخدام وأعلى أرباح ممكنة.

#### تعريف البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها " أسلوب رياضي يتعلق بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة ".

وتعرف أيضاً بأنها " أسلوب رياضي يعتمد عليه لمعالجة المشاكل الادارية وذلك للمساعدة في اتخاذ القرارات الاقتصادية لتحقيق أقصى مستوى من العوائد أو الوصول بالتكاليف إلى أدنى مستوى ممكن ".

كما عرفت المنظمة العربية للعلوم الادارية البرمجة الخطية بأنها " طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية ".



وتجدر الإشارة إلى أن لفظ البرمجة يشير إلى أن هذا الأسلوب يمكن من وضع برنامج عمل يحدد أنواع الأنشطة اللازم القيام بها وتوقيتها وكمياتها بأسلوب يتميز بفكرة الحلول المتتابة، بمعنى أن هذا الأسلوب يصل إلى الحل الأمثل على خطوات متتابة. أما لفظ الخطية فيشير إلى وجود علاقة خطية بين النواتج وبين الموارد المتاحة.

وهناك شروط معينة يستلزم توافرها في المشكلة التي يمكن حلها بواسطة البرمجة الخطية، وهذه الشروط هي:

1- وجود هدف معين يراد تحقيقه: لكل منظمة صناعية هدف تسعى إلى تحقيقه، حيث يسمى الهدف بمعيار الأفضلية، فهو الأساس الذي يتم بموجبه توزيع الموارد المحدودة على استخداماتها المتعددة، أى أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقه في شكل تعظيم الربح لأقصى حد ممكن، أو تدنية التكاليف لأقل حد ممكن.

2- ضرورة توافر مجموعة من القيود على بعض أو كل الموارد المتاحة تفيد الإدارة في الوصول لأهدافها سواء تدنية للتكاليف أو تعظيم للربح.

3- ضرورة توافر أكثر من بديل لحل المشكلة وأن تكون هذه البدائل متناسبة مع الموارد المتاحة وأن يتم الاختيار من هذه البدائل البديل الذى يحقق الهدف المطلوب.

4- ضرورة وجود علاقات كمية بين متغيرات المشكلة وتوضح تلك العلاقات فرض الخطية.

5- لا بد من التعبير عن عناصر المشكلة (الهدف والقيود) في شكل معادلات أو متباينات خطية.

كذلك يجب مراعاة أن التكاليف المطلوب تخفيضها هي التكاليف المتغيرة، حيث أن نصيب الوحدة منها ثابت الأمر الذى يساهم في تحقيق شرط الخطية.

## الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية:

يعتمد نموذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفروض الأساسية وهي:

1- فرض التأكد التام: وفقاً لهذا الفرض تكون إدارة المنظمة على علم تام وتأكد تام فيما يتعلق بكافة البيانات المتعلقة بدالة الهدف والقيود الموجودة على تحقيقه.

2- فرض الخطية: يقضى هذا الفرض بأن العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقات خطية.

3- فرض عدم السالبية: فى ضوء هذا الفرض فإنه يجب أن تكون كافة القيم المرتبطة بالحلول النهائية إما صفرية أو موجبة أى لا تكون هناك قيم سالبة.

4- فرض القابلية للتجزئة أو التقسيم: ويقضى هذا الفرض بأن الحلول الممكنة أمام الشركة ليس من الضروري أن تكون أرقام صحيحة فقط ولكن يمكن أن تكون أرقام كسرية أو صحيحة أو كليهما.

5- فرض ثبات هامش مساهمة الوحدة: أى أن هامش مساهمة الوحدة ثابت، ولتحقيق هذا الفرض يستلزم ثبات سعر بيع الوحدة بغض النظر عن حجم الإنتاج.

## تكوين نموذج البرمجة الخطية:

يمكن تعريف عملية بناء نموذج للبرمجة الخطية بأنه ترجمة لمشكلة توجد فى الواقع فى شكل مجموعة من المعادلات الرياضية.

فمن أجل تكوين نموذج البرمجة الخطية، فإن الأمر يتطلب إعادة صياغة البيانات الموجودة والتي تعبر عن المشكلة فى شكل علاقات رياضية حتى يمكن لنا أن نستخدم الأسلوب الرياضى لمعالجتها، ويمكن صياغة أى مشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية من خلال عدة خطوات وهي:



1- تحديد اتجاه دالة الهدف Objective Function ، هل هي تعظيم ربح أم  
تدنية تكاليف؟

2- تحديد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها ووضع رموز افتراضية لها.

3- صياغة دالة الهدف: لها حالتين هما:

أ- حالة تعظيم الربح:

إجمالي الربح ( ر ) = (ربح الوحدة من السلعة الأولى × عدد الوحدات المنتجة  
من السلعة الأولى) + (ربح الوحدة من السلعة الثانية × عدد الوحدات المنتجة  
من السلعة الثانية) + (ربح الوحدة من السلعة (ن) × عدد الوحدات المنتجة من  
السلعة (ن)).

ب- حالة تدنية التكاليف:

إجمالي التكلفة (ت) = (تكلفة الوحدة من السلعة الأولى × عدد الوحدات  
المنتجة من السلعة الأولى) + (تكلفة الوحدة من السلعة الثانية × عدد الوحدات  
المنتجة من السلعة الثانية) + (تكلفة الوحدة من السلعة (ن) × عدد الوحدات  
المنتجة من السلعة (ن)).

4- صياغة القيود المفروضة على دالة الهدف وتحديد اتجاه المتباينات، حيث  
يأخذ اتجاه المتباينات ثلاث اتجاهات وهي:

أ- إذا نص في المشكلة على وجود حد أقصى أو رقم معين متاح للمورد  
المستخدم (عدد ساعات العمل، طاقة الآلات... الخ) يكون اتجاه المتباينة أقل  
من أو يساوي ( $\geq$ ).

ب- إذا نص في المشكلة على أنه يتم استخدام الموارد المتاحة بالكامل لإنتاج  
المنتجات المراد إنتاجها يكون اتجاه المتباينة علامة (=).

ج- إذا نص في المشكلة على وجود حد أدنى أو على الأقل رقم معين من  
المورد المستخدم يكون اتجاه المتباينة أكبر من أو يساوي ( $\leq$ ).

5- صياغة قيود عدم السالبة: وهي تعنى أن كمية الإنتاج من السلعة الأولى والسلعة الثانية ... الخ لا بد أن يكون أكبر من أو تساوي صفر ( $\geq$ ) صفر.

ملاحظات هامة عند تكوين أو صياغة أى مشكلة فى شكل نموذج للبرمجة الخطية:

1- يجب أن تكون الوحدة المستخدمة للقياس فى نفس القيد ثابتة وهى ذاتها المستخدمة فى الطرف الأيسر من المتباينة.

2- ليس من الضروري أن تكون وحدة القياس المستخدمة لكل القيود ثابتة، فمثلاً يمكن استخدام ساعات العمل فى القيد الأول، وكمية الخشب فى القيد الثانى ..... وهكذا.

3- استخدام نفس الوحدة الزمنية فى كل القيود، فمثلاً يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الأولى عن عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً، نفس الشئ يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الثانية عن كمية الأخشاب المتاحة فى الأسبوع أيضاً.

4- ليس من الضروري أن تمثل كل من السلعتين فى القيد، فقط يكون القيد خاصاً بسلعه واحده فقط.

### مثال (1):

تقوم شركه "الهدى" بتصنيع سلعتين هما: السلعة (أ)، والسلعة (ب) كل سلعة منهما لا بد وأن تمر على ثلاث آلات وهى الآلة (س) ثم الآلة (ص) ثم الآلة (ع). ويحتاج تصنيع الوحدة من السلعة (أ) إلى (4) دقائق على الآلة (س)، و(3) دقائق على الآلة (ص)، و(5) دقائق على الآلة (ع). ويحتاج تصنيع الوحدة من السلعة (ب) إلى (3) دقائق على الآلة (س)، و(4) دقائق على الآلة (ع). فإذا علمت أن الطاقة القصوى لكل آلة من الآلات الثلاث هى (100) ساعة أسبوعياً، والحد الأقصى للمبيعات من السلعة (أ) هو (2000)



وحدة أسبوعياً، أما الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (ب) هو (1500) وحدة أسبوعياً. وكان ربح الوحدة من السلعة (أ) = 9 جنيه، وربح الوحدة من السلعة (ب) = 8 جنيه.

المطلوب: تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل سلعة بشكل يضمن تعظيم إجمالي الربح المحقق إلى أقصى حد ممكن .

### الحل

\* قبل أن نتعرض لخطوات صياغة مشكلة البرمجة الخطية، يمكن لنا أن نلخص بيانات المشكلة السابقة في شكل جدول كما يلي:

السلعة \ الآلة	س	ص	ع	الحد الأقصى للمبيعات	ربح الوحدة
أ	4	3	5	2000	9
ب	3	-	4	1500	8
الطاقة القصوى (ساعات)	100	100	100		

1- تحديد اتجاه دالة الهدف: تعظيم الربح ( ر ) .

2- تحديد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها:

نفترض أن:

س<sub>1</sub> = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (أ).

س<sub>2</sub> = عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (ب).

3- صياغة دالة الهدف:

إجمالي الربح ( ر ) = (ربح الوحدة من السلعة (أ) × عدد الوحدات المنتجة من السلعة (أ) ) + (ربح الوحدة من السلعة (ب) × عدد الوحدات المنتجة من السلعة (ب) ) .

∴ تصبح دالة الهدف هي: تعظيم ( ر ) = 9 س<sub>1</sub> + 8 س<sub>2</sub> .

وبذلك يكون حل المشكلة هو معرفة قيمة  $s_1$  ،  $s_2$  التي تجعل قيمه (ر) أقصى ما يمكن.

4- صياغة القيود: نجد في هذه المشكلة نوعان من القيود، قيود خاصة بالطاقة القصوى المتاحة للآلات، وقيود خاصة بالحد الأقصى المتاح للمبيعات.

- بالنسبة لقيود الآلات:

قيد الآلة (س): نجد أن الطاقة القصوى المتاحة للآلة (س) = 100 ساعة/أسبوعياً بمعنى أن الزمن الذي سيستغرق في تصنيع وحدات السلعة (أ) ووحدات السلعة (ب) يجب ألا يتجاوز 100 ساعة/أسبوعياً .

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (أ) =

زمن تصنيع الوحدة من السلعة (أ)  $\times$  عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (أ) =  $4 \times s_1$

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (ب) =

زمن تصنيع الوحدة من السلعة (ب)  $\times$  عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلعة (ب) =  $3 \times s_2$

∴ زمن تصنيع وحدات السلعة (أ) + زمن تصنيع وحدات السلعة (ب) يجب ألا يتجاوز 100 ساعة/أسبوعياً.

أي أن:  $4s_1 + 3s_2$  يجب أن تقل عن أو تساوى (100) ساعة/أسبوعياً ∴ قيد الآلة س:  $4s_1 + 3s_2 \geq 100$  ساعة / أسبوعياً.

وبنفس الطريقة نحدد قيد الآلة (ص)، وقيد الآلة (ع) كما يلي:

قيد الآلة (ص):  $3s_1 \geq 100$  ساعة / أسبوعياً .

قيد الآلة (ع):  $5s_1 + 4s_2 \geq 100$  ساعة / أسبوعياً .

- بالنسبة لقيود المبيعات:

لما كان الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (أ) = 2000 وحدة أسبوعياً



∴ الكمية التي سيتم إنتاجها من السلعة (أ) يجب ألا تزيد عن 2000 وحدة أسبوعياً

∴  $s_1 \geq 2000$  وحدة / أسبوعياً .

- لما كان الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (ب) = 1500 وحدة أسبوعياً

∴  $s_2 \geq 1500$  وحدة / أسبوعياً

- قيود عدم السالبة:

لما كانت كميات الإنتاج من السلعة (أ)، والسلعة (ب) لا يمكن أن تكون قيم

سالبة، وعلى ذلك فإن:  $s_1 \geq 0$  ،  $s_2 \geq 0$

وهذا يمكن تصوير النموذج الرياضي للمشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

دالة الهدف: تعظيم ( ر ) =  $9s_1 + 8s_2$

في ظل أن:

$$4s_1 + 3s_2 \geq 100$$

$$3s_1 \geq 100$$

$$5s_1 + 4s_2 \geq 100$$

$$s_1 \geq 2000$$

$$s_2 \geq 1500$$

$$s_1 \geq 0 , s_2 \geq 0$$

مثال (2):

ترغب إحدى الشركات في اختيار استراتيجية لنشاطها الإعلاني والتي تهدف إلى توصيل الرسالة الإعلانية إلى أكبر عدد من العملاء. وأمام الشركة أن تعلن في التلفزيون أو المجلات. ويتكلف الإعلان الواحد في التلفزيون 10000 جنيه ويمكن الوصول بالإعلان إلى 5000 فرد، أما الإعلان الواحد في المجلات فهو يتكلف 6000 جنيه فقط ويصل الإعلان بها إلى حوالي

4500 فرد. وتحتاج الشركة إلى استخدام (6) إعلانات على الأقل في التلفزيون، وألا يزيد عدد الإعلانات في المجلات عن (12) إعلاناً. فإذا كان حجم ميزانية الإعلان في الشركة لهذا العام هو 90000 جنيه. فما هو عدد الإعلانات الأمثل في كل وسيلة؟ قم بصياغة المشكلة في صورة نموذج للبرمجة الخطية.

### الحل

أولاً: صياغة المشكلة في صورة نموذج للبرمجة الخطية:  
من الواضح أن الشركة ترمى إلى زيادة عدد المشاهدين أو القارئین للإعلان إلى أقصى درجة. وتستخدم الشركة وسيلتين إعلانيتين وهما التلفزيون والمجلات. ومن هنا فإن الهدف الخاص بنموذج البرمجة الخطية الذي يعكس موقف هذه الشركة هو تعظيم عدد المشاهدين في كلا الوسيلتين.  
نفترض أن:

س<sub>1</sub> = عدد الاعلانات في التلفزيون.

س<sub>2</sub> = عدد الاعلانات في المجلات.

وبناءً عليه فإن دالة الهدف تصبح كالتالي:

تعظيم  $5000 \text{ س}_1 + 4500 \text{ س}_2$

وتعني تعظيم عدد المشاهدين لكل إعلانات الشركة.

أما مجموعة القيود فهي كما يلي:

\* قيد التكلفة وحجم الميزانية المتاحة:

$$10000 \text{ س}_1 + 6000 \text{ س}_2 \geq 90000$$

\* قيد عدد الإعلانات في التلفزيون:

$$\text{س}_1 \leq 6$$

\* قيد عدد الإعلانات في المجلات :

$$\text{س}_2 \geq 12$$



\* قيد عدم السالبة:  $s_1$  ،  $s_2 \leq$  صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضى للمشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية كما يلى:

$$\text{عظم } 5000 s_1 + 4500 s_2$$

فى ظل أن:

$$10000 s_1 + 6000 s_2 \geq 90000$$

$$s_1 \leq 6$$

$$s_2 \geq 12$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

مثال (3):

تقوم إحدى الشركات بإنتاج منتجين، وهما المنتج (س)، والمنتج (ص). ويمر المنتج (س) بعمليتين صناعيتين، بينما يمر المنتج (ص) بثلاث عمليات صناعية. ويبلغ عدد الساعات المخصصة للمنتجين فى العملية الأولى (54) ساعة/ عمل، وفى العملية الثانية (64) ساعة/ عمل. أما العملية الصناعية الثالثة فقد خصص فيها (16) ساعة / عمل لإنتاج المنتج (ص) فقط. فإذا علمت أن الشركة تبيع (20) جنيه من كل وحدة من المنتج (س) كما تبيع (50) جنيه من كل وحدة من المنتج (ص). كذلك يستغرق إنتاج الوحدة من المنتج (س) ساعة واحدة فى العملية الصناعية الأولى، و(4) ساعات فى العملية الصناعية الثانية. أما المنتج (ص) فتستغرق الوحدة منه (3) ساعات فى العملية الصناعية الأولى، وساعة واحدة فى كل من العملية الصناعية الثانية والثالثة.

المطلوب: صياغة المشكلة فى صورة نموذج برمجة خطية.

الحل

نفترض أن:

س<sub>1</sub> = عدد الوحدات المنتجة من المنتج (س).

س<sub>2</sub> = عدد الوحدات المنتجة من المنتج (ص).

دالة الهدف: تعظيم ( ر ) = 20 س<sub>1</sub> + 50 س<sub>2</sub>

في ظل القيود:

\* قيد عدد الساعات المتاحة في العملية الصناعية الأولى:

$$س_1 + 3 س_2 \geq 54$$

\* قيد عدد الساعات المتاحة في العملية الصناعية الثانية:

$$4 س_1 + س_2 \geq 64$$

\* قيد عدد الساعات المتاحة في العملية الصناعية الثالثة:

$$س_2 \geq 16$$

\* قيد عدم السالبة: س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ≤ صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضي للمشكلة في شكل نموذج للبرمجة الخطية  
كما يلي:

عظم : 20 س<sub>1</sub> + 50 س<sub>2</sub>

في ظل أن:

$$س_1 + 3 س_2 \geq 54$$

$$4 س_1 + س_2 \geq 64$$

$$س_2 \geq 16$$

$$س_1 ، س_2 \leq \text{صفر}$$

مثال (4):

تقوم شركة "ريماس" بإنتاج أحد المنتجات والذي يستخدم في إنتاجه نوعان من المواد الأولية وهما المادة (س) بتكلفة مقدارها (4) جنيهات للوحدة ، والمادة (ص) تتكلف الوحدة منها (16) جنيه. وإذا فرض أن وزن المنتج النهائي لابد وأن يكون (300) رطل، وأنه لابد من استخدام (28) وحده من المادة الأولية



(ص) على الأقل، كما ينبغي أن يزيد الحجم المستخدم من المادة الأولية (س) عن (40) وحدة. فإذا علمت أن كل وحدة من المادة (س) تزن (10) أرطال، وكل وحدة من المادة (ص) تزن (20) رطل. فما هي كمية المواد الأولية التي ينبغي استخدامها في إنتاج المنتج النهائي الخاص بتلك الشركة بحيث تتحقق أقل تكلفة ممكنة في إنتاجه؟

### الحل

نفترض أن:

س<sub>1</sub> = الكمية المستخدمة من المادة الأولية (س).

س<sub>2</sub> = الكمية المستخدمة من المادة الأولية (ص).

دالة الهدف:      تدنية (ت):  $4س_1 + 16س_2$

في ظل القيود:

\* قيد وزن المنتج النهائي:

$$10س_1 + 20س_2 = 300$$

\* قيد المستخدم من المادة (س):

$$س_1 \geq 40$$

\* قيد المستخدم من المادة (ص):

$$س_2 \leq 28$$

\* قيد عدم السالبة:      س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub>  $\leq$  صفر

وبذلك يصبح النموذج الرياضي للمشكلة في شكل نموذج للبرمجة الخطية كما يلي:

تدنية (ت)  $4س_1 + 16س_2$

في ظل أن:

$$10س_1 + 20س_2 = 300$$

$$س_1 \geq 40$$

$$s_2 \leq 28$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

مثال (5):

تقوم شركة "أحمد محمود" للمواد الغذائية بإنتاج بعض العصائر ويشترط في كل من هذه العصائر ألا تزيد نسبة اللون عن (2%)، ونسبة المادة الحافظة عن (5%)، ونسبة السكر عن (12%) . وتستخدم الشركة عدة مواد لتصنيع العصائر وهي (أ)، (ب)، (ج) والتي تختلف تكلفتها بالطن. وتحاول الشركة اختيار التوليفة التي تحقق لها أقل تكلفة إنتاج ممكنة مع مراعاة الشروط الصحية المطلوبة في العصير، فإذا كانت المعلومات المتاحة عن المواد المستخدمة في إنتاج العصير كما يلي:

المواد المستخدمة في التصنيع	أ	ب	ج
نسبة السكر	10%	15%	8%
نسبة اللون	3%	2%	1%
نسبة المادة الحافظة	6%	4%	2%
التكلفة لكل طن	3200	2800	4000

المطلوب: صياغة المشكلة في صورة نموذج برمجة خطية.

الحل

نفترض أن:

$s_1$  = الكمية المستخدمة من المادة (أ).

$s_2$  = الكمية المستخدمة من المادة (ب).

$s_3$  = الكمية المستخدمة من مادة (ج).

دالة الهدف:

$$\text{تدنية (ت)} = 3200 s_1 + 2800 s_2 + 4000 s_3$$



في ظل القيود:

(1) قيد نسبة السكر:

$$0.12 \geq \frac{0.10 \text{ س}_1 + 0.15 \text{ س}_2 + 0.08 \text{ س}_3}{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}$$

$$= 0.2 \text{ س}_1 + 0.03 \text{ س}_2 - 0.04 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

(2) قيد نسبة اللون:

$$0.02 \geq \frac{0.03 \text{ س}_1 + 0.02 \text{ س}_2 + 0.01 \text{ س}_3}{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}$$

$$= 0.01 \text{ س}_1 - 0.01 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

(3) قيد نسبة المادة الحافظة:

$$0.05 \geq \frac{0.06 \text{ س}_1 + 0.04 \text{ س}_2 + 0.02 \text{ س}_3}{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}$$

$$= 0.01 \text{ س}_1 - 0.01 \text{ س}_2 - 0.03 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

(4) قيد عدم السالبة:

$$\text{س}_1, \text{س}_2, \text{س}_3 \leq \text{صفر}$$

وبذلك يصبح النموذج الرياضي للمشكلة في شكل نموذج للبرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{تدنية (ت)} = 3200 \text{ س}_1 + 2800 \text{ س}_2 + 4000 \text{ س}_3$$

في ظل أن:

$$= 0.02 \text{ س}_1 + 0.03 \text{ س}_2 - 0.04 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

$$0.01 \text{ س}_1 - 0.01 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

$$0.01 \text{ س}_1 - 0.01 \text{ س}_2 - 0.03 \text{ س}_3 \geq \text{صفر}$$

$$\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 \leq \text{صفر}$$

### الحل البياني لمشكلة البرمجة الخطية:

يستخدم أسلوب الحل البياني في حل مشكلة البرمجة الخطية عندما لا يزيد عدد المتغيرات على اثنين ويعود ذلك إلى الاستحالة العملية لرسم أكثر من محاور لتصوير المشكلة بيانياً، وفي حالة زيادة عدد المتغيرات عن اثنين يتم استخدام أسلوب السمبلكس Simplex لحل المشاكل في هذه الحالة. وفيما يلي نفرض لكيفية الحل البياني لمشكلة البرمجة الخطية في حالة تعظيم الربح وفي حالة تدينة التكاليف:

### أولاً: استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تعظيم الربح:

تمر عملية حل مشكلة البرمجة الخطية البسيطة حلاً بيانياً بعدد من الخطوات وهي:

- 1- صياغة المشكلة في شكل نموذج رياضي.
- 2- تحويل المتباينات إلى معادلات رياضية وبافتراض المساواة وبدون اضافة متغير إضافي.
- 3- قم برسم محورين احدهما رأسي والآخر أفقي ولنسمى المحور الأفقي (س<sub>1</sub>)، والمحور الرأسي (س<sub>2</sub>).
- 4- خذ القيود الموجودة في المشكلة وقم بحل معادلاتها لتحديد قيمة (س<sub>1</sub>) القصوى، وقيمة (س<sub>2</sub>) القصوى بافتراض أن الطاقة المتاحة سوف تخصص بالكامل لإنتاج منتج واحد فقط منها.
- 5- قم برسم خط يربط بين قيمتي الإنتاج ككل من س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> والذي يمثل القيد الأول، وقم بعمل نفس الشيء للقيد الثاني ... وهكذا.



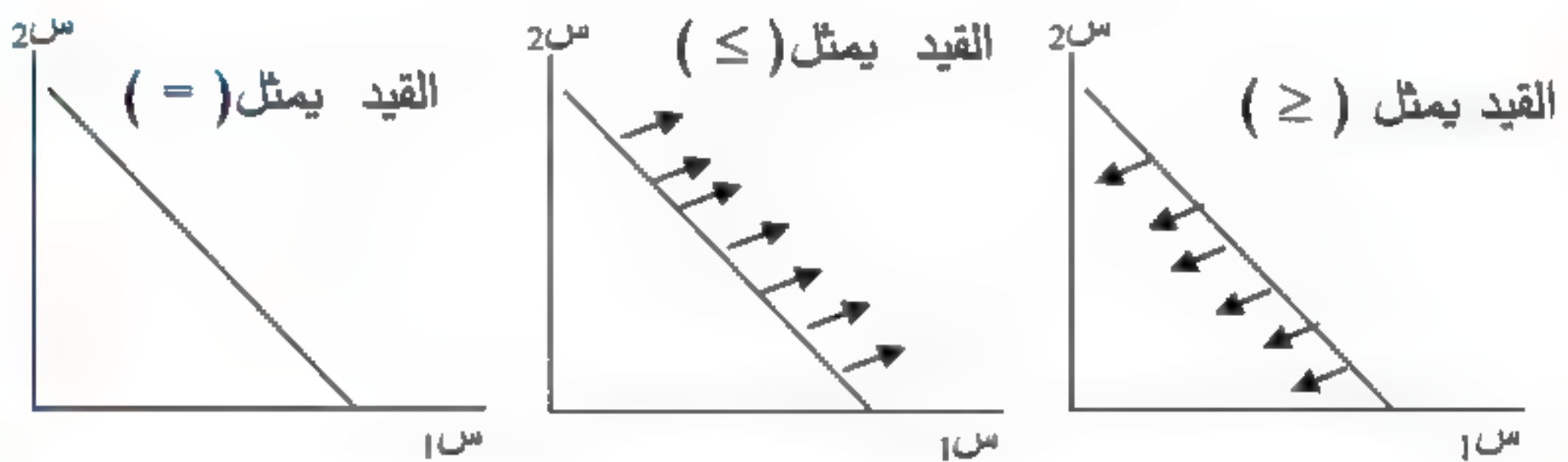
## 6- تحديد منطقة الحلول الممكنة: لتحديد منطقة الحلول الممكنة فإن ذلك

يتوقف على اتجاه المتباينة كما يلي:

أ- إذا كان القيد يمثل أقل من أو يساوي ( $\geq$ ) فإن الحل الممكن ينبغي أن يكون إما على الخط الذي يمثل القيد أو أسفله حيث ينبغي أن يكون الحل أسفل الخط للتعبير عن حالة "أقل من".

ب- إذا كان القيد يمثل أكبر من أو يساوي ( $\leq$ ) فإن الحل الممكن ينبغي أن يكون إما على الخط الذي يمثل القيد أو أي نقطة أعلى هذا الخط للتعبير عن حالة "أكبر من".

ج- إذا كان القيد يمثل حالة تساوي (=) فإن الحل الممكن ينبغي أن يكون على الخط نفسه. ويتضح ذلك كما يلي:



شكل رقم (2-1) : تحديد منطقة الحلول الممكنة.

## 7- إيجاد الحل الأمثل: ويتم ذلك عن طريق:

أ- تقييم الربح عند النقاط الركنية.

ب- رسم دالة الهدف بيانياً.

### مثال (6):

قم بحل المشكلة التالية بيانياً:

$$\text{تعظيم (ر) } = 20 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2$$

في ظل القيود:

$$320 \geq 2س + 4س$$

$$400 \geq 2س + 4س$$

$$س \geq 0$$

الحل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات:

المتباينة ← المعادلة

$$320 = 2س + 4س \leftarrow 320 \geq 2س + 4س$$

$$400 = 2س + 4س \leftarrow 400 \geq 2س + 4س$$

2- إيجاد قيمة س ، في كل معادلة:

لايجاد قيمة (س) نفترض أن (س) = صفر ، ولايجاد قيمة (س) نفترض أن (س) = صفر

\* رسم القيد الأول:

\* افترض أن س = صفر

$$320 = 2س + 4س$$

$$80 = 4س$$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى

(حيث س = صفر) هي (صفر ، 80) .

$$320 = 2س + 4س$$

$$160 = 2س$$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الأفقى (حيث س = صفر) هي (160 ، صفر).

وبالتالى يتم رسم خط القيد الأول ( المعادلة الأولى ) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 80) ، (160 ، صفر).



وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذي يمثل القيد الأول وبالرجوع إلى الصيغة التي كان عليها القيد الأول نجد وجود إشارة  $(\geq)$  وهي تعنى أن أى نقطة على الخط أو أسفل الخط تحقق هذا القيد.

\* رسم القيد الثانى:

نفترض أن س<sub>1</sub> = صفر من المعادلة 4 س<sub>1</sub> + 2 س<sub>2</sub> = 400

يكون 2 س<sub>2</sub> = 400 ومنها س<sub>2</sub> = 200

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الرأسى (حيث س<sub>1</sub> = صفر) هى ( صفر ، 200).

\* افترض أن س<sub>2</sub> = صفر

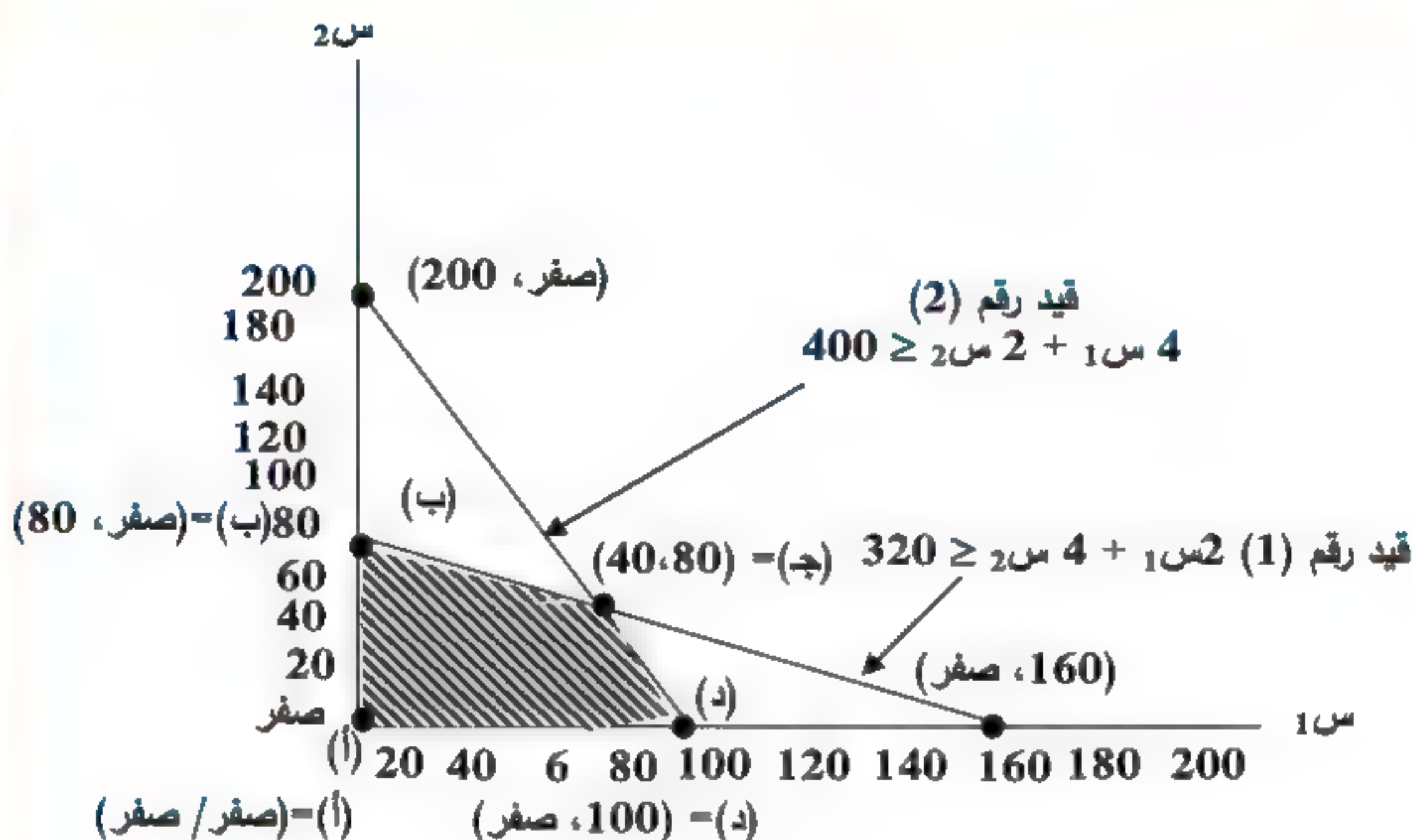
من المعادلة 4 س<sub>1</sub> + 2 س<sub>2</sub> = 400

يكون 4 س<sub>1</sub> = 400 ومنها س<sub>1</sub> = 100

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الأفقى (حيث س<sub>2</sub> = صفر) هى ( 100 ، صفر).

وبالتالى يتم رسم خط القيد الثانى ( المعادلة الثانية) بين النقطتين التاليتين: ( صفر ، 200 ) ، ( 100 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الثانى، وبالرجوع إلى الصيغة التي كان عليها القيد الثانى نجد وجود إشارة  $(\geq)$  وهي تعنى أن أى نقطة على الخط أو أسفل الخط تحقق هذا القيد ومن أجل تحديد نقاط الحل التي تحقق القيدين فى وقت واحد، نقوم برسم الشكل التالى:



### (3) إيجاد الحل الأمثل:

ويتم في هذه الخطوة اختيار الحل الأمثل وذلك من بين كل الحلول الممكنة لمشكلة البرمجة الخطية وهو الحل الذي يعظم (أو يقلل) من قيمة دالة الهدف. ويمكن القيام بهذه الخطوة في ظل الطريقة البيانية وذلك عن طريق تقييم النقاط الركنية كما يلي:

طالما أن القيود الموجودة في المشكلة هي قيود خطية ودالة الهدف دالة خطية وللمشكلة حلاً أمثل فإن قواعد الرسم تقتضي أن يقع هذا الحل في واحدة على الأقل من النقاط الركنية وهي: (أ ، ب ، ج ، د) حيث النقطة (أ) = (صفر ، صفر)، والنقطة (ب) = (صفر ، 80) ، والنقطة (د) = (100 ، صفر).

وللوصول إلى النقطة (ج) يتم ذلك عن طريق حل المعادلتين التاليتين معاً:

$$2س1 + 4س2 = 320 \leftarrow (1)$$

$$4س1 + 2س2 = 400 \leftarrow (2)$$



بضرب المعادلة رقم (1)  $\times 2$  ، وضرب المعادلة رقم (2)  $\times 1$  -  
نحصل على الآتى:

$$4 \text{ س } 1 + 8 \text{ س } 2 = 640 \leftarrow (3)$$

$$-4 \text{ س } 1 - 2 \text{ س } 2 = -400 \leftarrow (4)$$

بجمع المعادلتين (3)، (4) نحصل على:

$$6 \text{ س } 2 = 240 \quad \text{ومنها س } 2 = 40$$

بالتعويض عن قيمة س 2 = 40 فى المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$2 \text{ س } 1 + (40 \times 4) = 320$$

$$2 \text{ س } 1 - 320 = -160 \quad \text{ومنها س } 1 = 160$$

$$\text{س } 1 = 80$$

ويعنى ذلك أن النقطة الرابعة (ح) = (80، 40)

ويمكن تقدير الربح لكل النقط الركنية (أ ، ب ، ج ، د)

وذلك بالتعويض عن قيمة س 1 ، س 2 فى دالة الهدف واختيار أعلى ربح فى حالة تعظيم الربح. أما فى حالة تدنية التكاليف فتكون النقطة التى تحقق أقل تكلفة هى النقطة المثلى.

ويمكن الآن تقدير الأرباح المتوقعة عند النقاط الركنية الأربعة حسب دالة الهدف كما فى الجدول التالى:

النقاط الركنية	المزيج الإنتاجى		مقدار الأرباح حسب دالة الهدف ( ر ) = 20 س 1 + 10 س 2
	س 1	س 2	
(أ)	صفر	صفر	20 × صفر + 10 × صفر = صفر جنيه
(ب)	صفر	80	20 × صفر + 10 × 80 = 800 جنيه
(ج)	80	40	20 × 80 + 10 × 40 = 2000 جنيه
(د)	100	صفر	20 × 100 + 10 × صفر = 2000 جنيه

يتضح من الجدول السابق أن الحل الأمثل يقع عند النقطة (ج) حيث المزيج الانتاجي (س<sub>1</sub> = 80، س<sub>2</sub> = 40)،

وربح هذا المزيج الإنتاجي الأمثل = 2000 جنيه.

وأيضاً يقع الحل الأمثل عند النقطة (د) حيث المزيج الإنتاجي (س<sub>1</sub> = 100، س<sub>2</sub> = 0) وربح المزيج الإنتاجي الأمثل = 2000 جنيه.

ثانياً: استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تدنية التكاليف:

يتشابه استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة تدنية التكاليف مع استخدامها في حل مشكلة تعظيم الربح التي أوضحناها في المثال السابق. والفارق الوحيد سوف يكون في خطوة اختيار الحل الأمثل. ودعنا الآن ننتقل لتوضيح كيفية استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تدنية التكاليف.

مثال (7):

في ضوء البيانات التالية استخدم الطريقة البيانية في تحديد تشكيلة المنتجات التي تخفض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

دالة التكاليف تدنية (ت) = 8 س<sub>1</sub> + 4 س<sub>2</sub>

في ظل القيود:

$$6 س_1 + 6 س_2 \leq 36$$

$$6 س_1 + 2 س_2 \leq 24$$

س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> صفر

الحل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات، ويتحقق ذلك بافتراض استغلال كل الموارد المتوافرة استغلالاً كاملاً

المتباينة ← المعادلة

$$6 س_1 + 6 س_2 \leq 36 \leftarrow 6 س_1 + 6 س_2 = 36$$



$$6 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 \leq 24 \leftarrow 6 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 = 24$$

-2- إيجاد قيمة س 1 ، س 2 في كل معادلة:

\*رسم القيد الأول: المعادلة الأولى:  $6 \text{ س } 1 + 6 \text{ س } 2 = 36$

بفرض أن س 1 = صفر من المعادلة  $6 \text{ س } 1 + 6 \text{ س } 2 = 36$

$$\therefore 6 \text{ س } 2 = 36$$

$$\therefore 6 = 2 \text{ س } 2$$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى (حيث س 1 = صفر) هي (صفر، 6)

بفرض أن س 2 = صفر من المعادلة  $6 \text{ س } 1 + 6 \text{ س } 2 = 36$

$$\therefore 6 \text{ س } 1 = 36$$

$$\therefore 6 = 1 \text{ س } 1$$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الأفقى (حيث س 2 = صفر) هي (6 ، صفر).

وبالتالى يتم رسم خط القيد الأول ( المعادلة الأولى ) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 6) ، (6 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذى يمثل القيد الأول، وبالرجوع إلى الصيغة التى كان عليها القيد الأول نجد وجود إشارة ( ≤ ) وهى تعني أن أى نقطة على الخط أو أعلى الخط تحقق هذا القيد.

\*رسم القيد الثانى: المعادلة الثانية:  $6 \text{ س } 2 + 2 \text{ س } 2 = 24$

عند س 1 = صفر سوف تصبح س 2 = 12 ← النقطة (صفر، 12)

عند س 2 = صفر سوف تصبح س 1 = 4 ← النقطة (4 ، صفر)

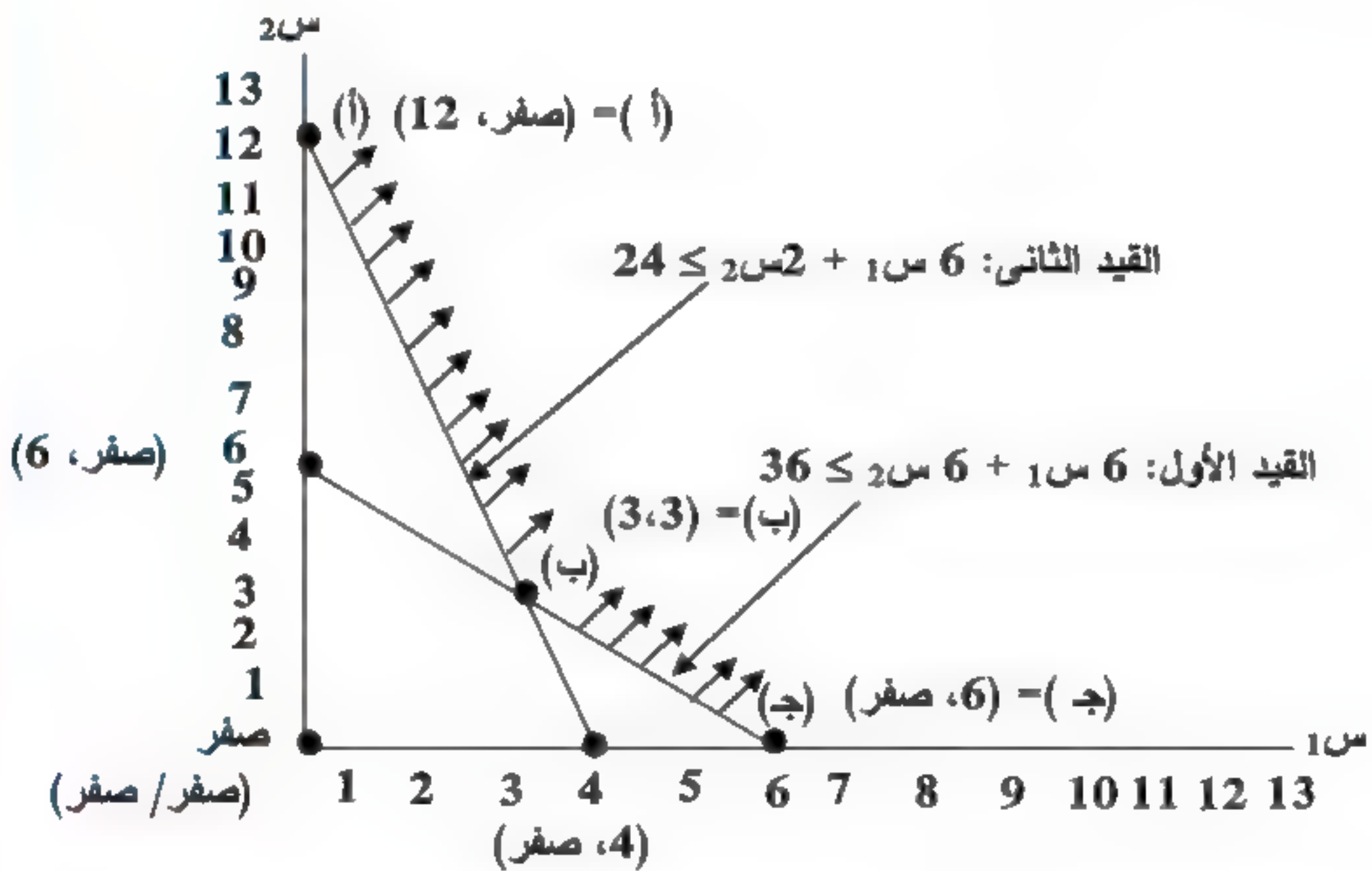
ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثانى مع المحور الرأسى (حيث س 1 = صفر) هي (صفر ، 12).

كما أن نقطة تقاطع خط القيد الثاني مع المحور الأفقي (حيث  $s_2 = 0$ ) هي (4 ، صفر).

وبالتالي يتم رسم خط القيد الثاني (المعادلة الثانية) بين النقطتين التاليتين: (صفر ، 12) ، (4 ، صفر).

وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلى الخط المستقيم الذي يمثل القيد الثاني، وبالرجوع إلى الصيغة التي كان عليها القيد الثاني نجد إشارة  $(\leq)$  وهي تعني أن أي نقطة على الخط أو أعلى الخط تحقق هذا القيد.

ومن أجل تحديد نقاط الحل التي تحقق القيدين في وقت واحد نقوم برسم النقاط السابقة على الشكل التالي:



### 3- إيجاد الحل الأمثل:

يلاحظ من الشكل السابق أن القيدين قد التقيا في النقطة (ب)، وطالما أن القيود الموجودة في المشكلة هي قيود خطية ودالة الهدف خطية وللمشكلة حلاً



أمثل فإن قواعد الرسم تقتضى أن يقع هذا الحل فى واحدة على الأقل من النقط  
الركنية وهى: ( أ ، ب ، ج ).

حيث النقطة (أ) = (صفر ، 12) ، والنقطة (ج) = (6 ، صفر)  
وللوصول إلى النقطة (ب) يتم ذلك عن طريق حل المعادلتين معاً كما يلى:

$$6س_1 + 6س_2 = 36 \leftarrow (1)$$

$$6س_2 + 2س_2 = 24 \leftarrow (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) تكون النتيجة

$$4س_2 = 12 \text{ ومنها } 3س_2 = 3$$

وبالتعويض بقيمة  $3س_2 = 3$  فى المعادلة (1) نجد أن

$$6س_1 + (3 \times 6) = 36$$

$$\text{ومنها } 6س_1 = 18 \text{ ومنها } 3س_1 = 3$$

ويعنى ذلك أن النقطة الثالثة (ب) = (3 ، 3) .

ويمكن الآن تقدير التكاليف المتوقعة عند النقاط الركنية أ ، ب ، ج حسب دالة  
الهدف كما فى الجدول التالى:

النقاط الركنية	المزيج الإنتاجى		مقدار التكاليف حسب دالة الهدف (ت) = $8س_1 + 4س_2$
	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	
(أ)	صفر	12	$8 \times \text{صفر} + 12 \times 4 = 48$ جنيه
(ب)	3	3	$8 \times 3 + 3 \times 4 = 36$ جنيه
(ج)	6	صفر	$8 \times 6 + 4 \times \text{صفر} = 48$ جنيه

يتضح من الجدول السابق أن الحل الأمثل الذى يخفض التكاليف إلى أدنى حد  
لها يقع عند النقطة (ب) حيث المزيج الإنتاجى ( $3س_1 = 3$  ،  $3س_2 = 3$ ) ،  
وتكلفة المزيج الإنتاجى الأمثل = 36 جنيه.

## تمارين علي الفصل الثاني

**تمرين (1):** تقوم شركة الأثاثات المعدنية بإنتاج ثلاث أنواع من المكاتب الحديثة صغيرة الحجم، متوسطة، مكاتب للآلات الكاتبة. وكانت هذه الشركة توظف 200 عامل ماهر، 150 عامل نصف ماهر وكانت عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً 40 ساعة. وكانت كل وحدة من المكاتب المنتجة تحتاج إلي النوعين من العمالة كالآتي:

مكاتب			منتجات عمالة
للآلة الكاتبة	متوسطة	صغيرة	
8	3	5	ماهرة
11	7	5	نصف ماهرة

فإذا علمت أن مساهمة كل وحدة من المكاتب المنتجة صغيرة، متوسطة والمكاتب المخصصة للآلة الكاتبة هي 5، 2، 6 جنيهات على التوالي :  
المطلوب : صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

**تمرين (2):** يقوم مزارع بخلط ثلاث أنواع من مزيج العلف لإطعام ماشيته. بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (أ) 20 قرش للكيلو.  
بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (ب) 40 قرش للكيلو.  
بحيث بلغت تكلفة طعام التغذية (ج) 50 قرش للكيلو.

وقد كانت هناك متطلبات معينة في صورة عناصر يتكون منها المزيج الكلي لكي يمكنه تحقيق القيمة الغذائية المرغوب فيها، ويتضمن كل مزيج كميات متباينة من العناصر المطلوبة (بروتين . كالسيوم . فيتامين).

كما يظهر في الجدول التالي حيث يوضح الحد الأدنى من المتطلبات وعدد وحدات كل عنصر في كل كيلو من مزيج العلف ويهدف المزارع إلي تقديم الكمية المناسبة من العلف بأدنى تكلفة ممكنة.



الحد الأدنى المطلوب أسبوعياً	مواد			منتجات  متطلبات العناصر الغذائية
	ج	ب	أ	
5	1	3	2	بروتين (ب)
2	1	2	1	كالسيوم (ك)
3	3	2	2	فيتامين (ف)

وكان الحد الأقصى للتغذية في الأسبوع 10 كيلو.  
المطلوب: تقديم الكمية المناسبة من العلف للماشية بحيث تكون التكلفة عند حدها الأدنى.

تمرين (3): إذ كانت إحدى الشركات تقوم بإنتاج إحدى المنتجات والذي يستخدم في إنتاجه نوعان من المواد ( أ ، ب ) بتكلفة قدرها 2، 8 للوحدة علي التوالي .

وكان وزن المنتج النهائي لا بد أن يكون 150 رطل ، ولا بد من استخدام 14 وحدة علي الأقل من المادة (ب) ، ولا ينبغي أن يزيد الحجم المستخدم من المادة الأولية ( أ ) عن 20 وحدة. فإذا علمت أن كل وحدة من المادة ( أ ) تزن 5 أرطال ، وكل وحدة من المادة (ب) تزن 10 أرطال .  
المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

تمرين (4): تقوم شركة مصر للبتروك بإنتاج ثلاثة أنواع من البنزين وهم : الممتاز 92، والسوبر 90، والعادي 80. ويتطلب كل صنف ثلاثة مكونات وهي: البنزين الخام ، والأوكتين، ومواد كيميائية معينة حيث يتوافر منها أسبوعياً علي التوالي 32000، 24000، 11000 جالون لدي الشركة. ويتطلب إنتاج الجالون من البنزين الممتاز 0.22 جالون من البنزين الخام ،

0.5 جالون من الأوكتين، 0.28 جالون من المواد الكيماوية. أما البنزين السوبر فيحتاج إلي 0.55 جالون من البنزين الخام ، 0.32، جالون من الأوكتين، 0.13 جالون من المواد الكيماوية. أما البنزين العادي فيحتاج إلي 0.72 جالون من البنزين الخام ، 0.2 جالون من الأوكتين، 0.08 جالون من المواد الكيماوية. فإذا علمت أن ربح الجالون من البنزين الممتاز والسوبر والعادي هو 0.048، 0.40، 0.029 علي التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة ( غير مطلوب حل النموذج).

تمرين(5): ترغب إحدى الشركات التي تعمل في مجال المطاعم الإعلان عن الوجبات التي تقدمها للعملاء. وقد توافرت لديها مجموعة من الوسائل الترويجية وهي : الإعلان بالتلفزيون، والإعلان بالجرائد، والإعلان بالإذاعة بالفترة الصباحية، والإعلان بالإذاعة بالفترة المسائية. وقد أمكن جمع بيانات عن عدد الأفراد الذين يمكن أن يصل إليهم الإعلان من خلال الوسيلة الإعلانية ، وكذلك تكلفة الإعلان في كل وسيلة، والحد الأقصى المسموح به لعدد الإعلانات عبر كل وسيلة في الأسبوع:



الحد الأقصى المسموح به لعدد الإعلانات أسبوعياً	تكلفة الإعلان الواحد بالجنيه	عدد المشاهدين	الوسيلة الإعلانية
12	800	5000	التلفزيون
5	925	8500	الجرائد
25	290	2400	الإذاعة بالفترة الصباحية
20	280	2800	الإذاعة بالفترة المسائية

وتلتزم الشركة بناء علي تعاقدات مسبقة بألا يقل مجموع الإعلانات المقدمة من خلال الإذاعة بنوعيتها عن (5) إعلانات أسبوعياً. ومن ناحية أخرى تصر الإدارة علي عدم إنفاق أكثر من 1800 جنيهاً علي الإعلان الأسبوعي بالإذاعة بنوعيتها.

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية بما يضمن تعظيم عدد المشاهدين للإعلانات. علماً بأن المبلغ الإجمالي المخصص للإعلان هو 8000 جنيه ( غير مطلوب حل النموذج).

تمرين(6): تفكر شركة هوندا اليابانية في إنتاج 3 أنواع جديدة من الدراجات البخارية وهي : C 90 ، C 250 ، C 700 . وتستخدم الشركة 3 أنواع من المواد الخام وهي ( أ، ب، ج) ولكن هناك مشكلة ندرة في تلك المواد فالكميات المطلوب توريدها منها يومياً هي : 400، 200، 300 طن علي التوالي، مع ملاحظة أن المادة (أ) يجب أن تستخدم بالكامل في نفس يوم توريدها للمصنع لأسباب فنية، أما المادتين (ب، ج) فيجب أن تشتري تلك المواد كحد أقصى

حيث أنه إذا تبقى منها أي كمية لليوم التالي فهذا يتطلب ظروف تخزينية معينة ومكلفة. وفيما يلي بيانات الأرباح وعدد الأطنان المستخدمة من كل مادة:

نوع الدراجة	ربح الدراجة	المادة (أ)	المادة (ب)	المادة (ج)
C 90	140 دولار	2 طن	1 طن	1 طن
C 250	300 دولار	8 طن	1 طن	----
C 700	400 دولار	2 طن	4 طن	1 طن

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية بما يضمن تعظيم أرباح الشركة.

تمرين (7): تقوم شركة "ريماس" بإنتاج أجهزة التلفزيون ، والفيديو . وكانت مساهمة الأرباح لها 2، 3 علي التوالي ، ويحاول مدير الإنتاج تحديد المزيج الأمثل لتعظيم الربح ، وتوافر للمدير المعلومات التالية:

يمكن للشركة جميع 10 أجهزة تلفزيون في اليوم كحد أقصى، كما يمكن للشركة جميع 12 جهاز فيديو في اليوم كحد أقصى.

يمكن استخدام العمالة بطاقة قصوي في اليوم وفي تلك الحالة يمكن للشركة جميع 15 جهاز تلفزيون في اليوم أو جميع 15 جهاز فيديو.

الطاقة المتاحة لقسم التشطيب 18 جهاز تلفزيون أو 18 جهاز فيديو.

تبين من الدراسات أن طاقة قسم التخزين 12 جهاز تلفزيون أو 24 جهاز فيديو.



**المطلوب:** صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية بما يضمن تعظيم أرباح الشركة.

**تمرين (8):** تفكر إحدى شركات إنتاج المواد الغذائية في إنتاج نوعان من المكرونة. وقد أوضحت الدراسات أن الوحدة من النوع الأول تحتاج إلى 0.3 كيلو دقيق، أما الوحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى 0.2 كيلو دقيق أيضاً. وقد كان تشغيل الوحدة من النوع الأول في قسم الإنتاج يحتاج 0.1 ساعة عمل، بينما تحتاج الوحدة من النوع الثاني 0.15 ساعة عمل. فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة أسبوعياً هي 100 كيلو، وأن ساعات العمل المتاحة أسبوعياً هي 35 ساعة. كما أن ظروف السوق أوضحت أن الإنتاج من النوع الأول يجب أن يكون على الأقل معادلاً 70% من إجمالي الإنتاج من النوعين. فإذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 0.1 جنيه، وربح الوحدة من النوع الثاني 0.25 جنيه.

**المطلوب :** صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

**تمرين (9):** تفكر شركة " أحمد محمود " للمواد الغذائية في إنتاج نوعان من المكرونة . وقد أوضحت الدراسات أن الوحدة من النوع الأول تحتاج إلى 0.2 كيلو دقيق، أما الوحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى 0.3 كيلو دقيق أيضاً. وقد كان تشغيل الوحدة من النوع الأول في قسم الإنتاج يحتاج 0.15 ساعة عمل ، بينما تحتاج الوحدة من النوع الثاني 0.1 ساعة عمل. وقد أوضحت الدراسات كذلك أنه يمكن استخدام على الأقل 200 كيلو من الدقيق أسبوعياً ، وأن ساعات العمل المتاحة أسبوعياً هي 70 ساعة. كما أن ظروف السوق أوضحت أن الإنتاج من النوع الثاني يجب أن يكون معادلاً كحد أقصى 65% من إجمالي الإنتاج من النوعين. فإذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 0.25 جنيه ، وربح الوحدة من النوع الثاني 0.1 جنيه.

**المطلوب :** صياغة المشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية.

**تمرين (10):** ترغب إحدى الشركات التي تعمل في مجال المطاعم الإعلان عن الوجبات التي تقدمها للعملاء. وقد توافرت لديها مجموعة من الوسائل الترويجية وهي : الإعلان بالإذاعة بالفترة الصباحية، والإعلان بالإذاعة بالفترة المسائية، والإعلان بالتلفزيون، والإعلان بالجرائد . وقد أمكن جمع بيانات عن عدد الأفراد الذين يمكن أن يصل إليهم الإعلان من خلال الوسيلة الإعلانية ، وكذلك تكلفة الإعلان في كل وسيلة، والحد الأقصى المسموح به لعدد الإعلانات عبر كل وسيلة في الأسبوع:

الوسيلة الإعلانية	عدد المشاهدين	تكلفة الإعلان الواحد بالجنيه	الحد الأقصى المسموح به لعدد الإعلانات أسبوعياً
الإذاعة بالفترة الصباحية	4800	580	50
الإذاعة بالفترة المسائية	5600	560	40
التلفزيون	10000	1600	24
الجرائد	17000	1850	10

وتلتزم الشركة بناء علي تعاقدات مسبقة ألا يقل مجموع الإعلانات المقدمة من خلال الإذاعة بنوعيتها عن (10) إعلانات أسبوعياً. ومن ناحية أخرى تصر الإدارة علي عدم إنفاق أكثر من (3600) جنيهاً علي الإعلان الأسبوعي بالإذاعة بنوعيتها.

**المطلوب:** صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية بما يضمن تعظيم عدد المشاهدين للإعلانات. علماً بأن المبلغ الإجمالي المخصص للإعلان هو (16000) جنيه ( غير مطلوب حل النموذج).



**تمرين (11):** تمتلك إحدى الشركات آلتين لتصنيع منتجين، وتبلغ الطاقة الانتاجية للآلة الأولى (40) ساعة، بينما تبلغ الطاقة الانتاجية الخاصة بالآلة الثانية (32) ساعة يومياً . فإذا كانت الوحدة من المنتج الأول تستغرق عملية إنتاجها على كل من الآلة الأولى والثانية 4 ساعات، وساعتين على التوالى، بينما تحتاج الوحدة من المنتج الثانى إلى ساعتين على الآلة الأولى، و(4) ساعات على الآلة الثانية. فإذا كان ربح الوحدة من المنتج الأول (12) جنيه، وربح الوحدة من المنتج الثانى (8) جنيهات.

**المطلوب:**

أ- صياغة نموذج البرمجة الخطية لتلك المشكلة.

ب- استخدام الطريقة البيانية لأسلوب البرمجة الخطية فى ايجاد المزيج السلعى الذى يحقق أكبر ربح ممكن.

**تمرين (12):** فى ضوء البيانات التالية استخدم الطريقة البيانية لأسلوب البرمجة الخطية فى تحديد تشكيلة المنتجات التى تخفض التكاليف إلى أدنى حد ممكن:

دالة التكاليف (ت) =  $2س_1 + 5س_2$

فى ظل القيود:

$$20س_1 + 10س_2 \leq 200$$

$$20 \geq س_1$$

$$16 = س_1 + س_2$$

$$س_1 ، س_2 \leq \text{صفر}$$

## الفصل الثالث

### البرمجة الخطية / أسلوب السمبلكس

### Linear Programming – Simplex Method

- مقدمة.
- خطوات الحل باستخدام أسلوب السمبلكس:
  - أولاً: استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تعظيم الربح.
  - ثانياً: استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تدنية التكاليف.
- بعض المشاكل الخاصة عند استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشكلات البرمجة الخطية:
  - المشكلة الأولى: حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) في الصف الأخير.
  - المشكلة الثانية: مشكلة عدم الانتظام.
  - المشكلة الثالثة: حالة وجود أكثر من حل أمثل.
  - المشكلة الرابعة: مشكلة عدم وجود حل ممكن.
  - المشكلة الخامسة: مشكلة الحل غير المحدد (عدم وجود منطقة حلول ممكنة).
- أسعار الظل.
- تمارين للتدريب.



## البرمجة الخطية / أسلوب السمبلكس

### مقدمة:

تبين من الفصل السابق كيف تستخدم الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية بسهولة نظراً لوجود متغيرين فقط أو سلعتين اثنتين أمكن تمثيل كل منهما على أحد الإحداثيين الرأسي والأفقي، أما في حالة تعدد المتغيرات أو المنتجات فإنه من غير الممكن استخدام الطريقة البيانية، وفي مثل هذه الحالات لابد من استخدام أسلوب السمبلكس Simplex Method الذي يصلح لحل مشاكل البرمجة الخطية التي تتسم بتعدد القيود والمتغيرات. ويعتبر أسلوب السمبلكس من أكفأ الطرق المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية، وهو أسلوب يعتمد على فكرة الوصول إلى الحل الأمثل للمشاكل عن طريق مجموعة من الدورات، بحيث تسعى كل دورة منها إلى تحسين الحل عن الدورة التي تسبقها. وتبدأ هذه الطريقة عادة بأعداد المشكلة في شكل جبري، ثم اعداد جدول السمبلكس ثم اختيار الحل المبدئي ثم البحث عن حل أو مجموعة من الحلول أفضل من الحل المبدئي وذلك حتى نصل إلى الحل الذي يحقق دالة الهدف سواء تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. وتعتمد طريقة السمبلكس بصفة أساسية على استخدام جبر المصفوفات كأسلوب لحل مشاكل البرمجة الخطية، وعلى وجه الخصوص تعتبر طريقة - جاوس جوردن للحذف الكامل Gauss-Jordan Complete Elimination والتي تستخدم لحل مجموعة من المعادلات أنياً هي الأساس الذي بنيت عليه طريقة السمبلكس.

### خطوات الحل باستخدام أسلوب السمبلكس:

توجد مجموعة من الخطوات لحل مشاكل البرمجة الخطية سواء أكانت مشكلة تعظيم الربح أو تدنية التكاليف وتتمثل هذه الخطوات فيما يلي:

1- صياغة المشكلة محور الدراسة في صورة النموذج الرياضى للبرمجة الخطية والذي يشمل: دالة الهدف، والقيود، وشرط عدم السالبة، أى استخدام متباينات تصف دالة الهدف ومحددات المشكلة.

2- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) وذلك بإضافة متغيرات تختلف حسب أنواع القيود:

أ- إذا كان اتجاه المتباينة ( $\geq$ ) يتم إضافة متغير عاطل (ع) قيمته فى دالة الهدف = صفر، وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته  $= +1$ .

ب- إذا كان اتجاه المتباينة ( $=$ ) يتم إضافة متغير وهمى (و) قيمته فى دالة الهدف  $= (-م)$  فى حالة تعظيم الربح، وقيمته فى دالة الهدف  $= (+م)$  فى حالة تدنية التكاليف. وفى بقية القيود قيمته = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته  $= +1$ .

ج- إذا كان اتجاه المتباينة ( $\leq$ ) يتم إضافة متغير وهمى (و) قيمته فى دالة الهدف  $= (-م)$  فى حالة تعظيم الربح، وقيمته فى دالة الهدف  $= (+م)$  فى حالة تدنية التكاليف. وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته  $= +1$ . وكذلك يتم طرح متغير فائض (ف) قيمته فى دالة الهدف = صفر، وفى بقية القيود قيمته أيضاً = صفر، أما القيد الذى يوجد به هذا المتغير فقيمته  $= -1$ .

3- اعداد جدول الحل المبدئى عن طريق ايجاد كل المتغيرات فى كل المعادلات ودالة الهدف.

4- تحديد المتغير الذى يدخل الحل، وهو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) وذلك فى حالة مشكلة تعظيم الربح، وصاحب أكبر قيمة سالبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) وذلك فى حالة



مشكلة تدنية التكاليف. ويطلق على عمود المتغير الذي يدخل الحل عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذي يترك الحل وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة في عمود المتغير الذي يدخل الحل (عمود البؤرة)، ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب. ويطلق على صف المتغير الذي يترك الحل صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة وهو الرقم الذي يمثل نقطة تقاطع عمود المتغير الذي يدخل الحل (عمود البؤرة) مع صف المتغير الذي يترك الحل (صف البؤرة).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الذي يدخل الحل، وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في صف المتغير الذي يترك الحل (صف البؤرة) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح.

8- حساب القيم الجديدة للمتغيرات الأخرى (الصفوف الأخرى) في جدول الحل التالي وذلك باستخدام المعادلة التالية.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{قيم أي صف} \\ \text{جديد} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{القيم الموجودة في} \\ \text{الصف المراد نقله} \\ \text{إلى الجدول الجديد} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{القيم المقابلة لصف} \\ \text{المتغير الجديد الذي} \\ \text{يدخل الحل} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{نقطة تقاطع هذا} \\ \text{الصف مع عمود} \\ \text{البؤرة} \end{array} \right]$$

9- اعداد جدول السمبلكس الثاني.

10- تحديد ما إذا كان جدول السمبلكس الثاني يمثل جدول الحل الأمثل أم لا حيث:

أ- نصل إلى الحل الأمثل في حالة مشكلة تعظيم الربح إذا كانت كل الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) قيم صفرية أو سالبة.

ب- نصل إلى الحل الأمثل في حالة مشكلة تدنية التكاليف إذا كانت كل الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) قيم صفرية أو موجبة.

11- إذا لم يكن جدول السمبلكس الثانى هو جدول الحل الأمثل نكرر الخطوات السابقة من (4) إلى (10) مرة أخرى حتى نصل إلى الحل الأمثل.

ملاحظات هامة عند استخدام أسلوب السمبلكس:

1- المتغيرات الأساسية في أى جدول سمبلكس (متغيرات الحل) تكون معاً مصفوفة الوحدة.

2- قيم المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) في الصف الأخير (م ز - ل ز) في أى جدول سمبلكس هي قيم صفرية.

3- إذا تساوت أرقام متغيرين في الصف الأخير (م ز - ل ز) في أى جدول سمبلكس يفضل عند اختيار المتغير الذى يدخل الحل اختيار المتغيرات س<sub>1</sub>، س<sub>2</sub> ..... بدلاً من المتغيرات العاطلة (ع<sub>1</sub>، ع<sub>2</sub>، ..... ) أو المتغيرات الوهمية (و<sub>1</sub>، و<sub>2</sub> .....).

4- عند تحديد المتغير الذى يترك الحل إذا تساوى ناتج أقل ناتج قسمة موجب لمتغيرين يفضل في هذه الحالة إخراج المتغيرات الوهمية (و<sub>1</sub>، و<sub>2</sub> ..... ) أولاً ثم بعد ذلك إخراج المتغيرات العاطلة (ع<sub>1</sub>، ع<sub>2</sub> .....).

5- عند تكوين جدول السمبلكس المبدئى فإن المتغيرات التى تظهر في عمود المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) هي متغيرات الطاقة العاطلة (ع) والمتغيرات الوهمية (و)، أما المتغيرات الفائضة (ف) فهي لا تظهر أو لا تدخل ضمن المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس المبدئى ولكنها يمكن أن تظهر في جداول الحل بعد جدول السمبلكس المبدئى.

أولاً: استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تعظيم الربح:



مثال (1): حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{عظم (ر) } = 3س_1 + 2س_2$$

في ظل أن:

$$س_1 + 2س_2 \geq 6$$

$$2س_1 + س_2 \geq 6$$

$$س_1, س_2 \geq \text{صفر}$$

### الحل

1- حيث أن المشكلة تم صياغتها في شكل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية ننتقل إلى الخطوة (2).

2- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلي:

•  $س_1 + 2س_2 \geq 6$  حيث أن اتجاه المتباينة ( $\geq$ ) يتم إضافة متغير

عاطل (ع<sub>1</sub>) وبالتالي تصبح المعادلة كما يلي:

$$س_1 + 2س_2 + ع_1 = 6$$

•  $2س_1 + س_2 \geq 6$  حيث أن اتجاه المتباينة ( $\geq$ ) يتم إضافة متغير

عاطل (ع<sub>2</sub>) وبالتالي تصبح المعادلة كما يلي:

$$2س_1 + س_2 + ع_2 = 6$$

3- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{عظم (ر) } = 3س_1 + 2س_2 + \text{صفر} \cdot ع_1 + \text{صفر} \cdot ع_2$$

في ظل أن:

$$س_1 + 2س_2 + ع_1 = 6$$

$$2س_1 + س_2 + ع_2 = 6$$

4- اعداد جدول السمبلكس المبدئي:

### جدول السمبلكس المبدئي

ريخ الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م ز			
			3	2	صفر	صفر
صفر	1ع	6	1	2	1	صفر
صفر	2ع	6	2	1	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز - ل ز		3	2	صفر	صفر

لاحظ أنه في جدول السمبلكس السابق المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) 1ع ، 2ع كونت معاً مصفوفة الوحدة، كما أن قيم المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) 1ع ، 2ع في الصف الأخير (م ز - ل ز) تساوى صفر.

تم حساب الأرقام الموجودة في الصف (ل ز) عن طريق ضرب ريع الوحدة للمتغيرات الأساسية في الأرقام المناظرة في مصفوفة المعاملات لكل عمود ثم جمعها بعد ذلك. ومثال ذلك الخانة الموجودة في الصف (ل ز) عند عمود قيم متغيرات الحل محسوبة كالآتي:

$$(6 \times \text{صفر}) + (6 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

وكذلك فإن الخانة الثانية عند عمود س<sub>1</sub> في الصف (ل ز) محسوبة كالآتي:

$$(1 \times \text{صفر}) + (2 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

وباقى الخانات محسوبة كالآتي:

$$\text{عند عمود س}_2: (2 \times \text{صفر}) + (1 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$\text{عند عمود 1ع}: (1 \times \text{صفر}) + (\text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

$$\text{عند عمود 2ع}: (\text{صفر} \times \text{صفر}) + (1 \times \text{صفر}) = \text{صفر}$$

وبتأمل هذه الأرقام نجد أن الرقم الموجود عند عمود قيم متغيرات الحل في الصف (ل ز) يعبر عن ريع الحل. فعدم إنتاج س<sub>1</sub>، س<sub>2</sub> سوف يجعل 1ع، 2ع أقصى ما يمكن، والريخ المحقق منهم هو الصفر.



تم حساب الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) عن طريق طرح الأرقام الموجودة في الصف (ل ز) من الأرقام المعبرة عن ربح الوحدة الموجودة في الصف (م ز) أعلى الجدول، فمثلاً الخانة الأولى في الصف (م ز - ل ز) عند عمود س1 عبارة عن  $3 - \text{صفر} = 3$  وهكذا لباقي خانات الصف (م ز - ل ز).

4- تحديد المتغير الذي يدخل الحل، وهو المتغير (س1) صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف الأخير (م ز - ل ز)، ويطلق على عمود المتغير (س1) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذي يترك الحل وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة في عمود المتغير الذي يدخل الحل (عمود البؤرة س1) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب كما يلي:

- عند ع1:  $6 = 1 \div 6$

- عند ع2:  $3 = 2 \div 6 \leftarrow$  أقل ناتج قسمة موجب

وبالتالي فإن المتغير (ع2) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (ع2) صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة: وهو الرقم الذي يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة (عمود المتغير س1) مع صف البؤرة (صف المتغير ع2) بالتالي فإن رقم البؤرة هو الرقم (2).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س1) الذي يدخل الحل في جدول السمبلكس الثاني: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة في صف البؤرة أي صف المتغير (ع2) على رقم البؤرة، وبالتالي تصبح أرقام صف المتغير (س1) في جدول السمبلكس الثاني كما يلي:

$$3 = 2 \div 6$$

$$1 = 2 \div 2$$

$$\frac{1}{2} = 2 \div 1$$

$$\text{صفر} = 2 \div \text{صفر}$$

$$\frac{1}{2} = 2 \div 1$$

∴ قيم الصف (س<sub>1</sub>) الجديدة هي: (3 ، 1 ،  $\frac{1}{2}$  ، صفر ،  $\frac{1}{2}$ )

8- تحديد قيم الصف (ع<sub>1</sub>) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم صف ع<sub>1</sub> الجديدة = قيم الصف ع<sub>1</sub> القديمة - (القيم المقابلة لصف س<sub>1</sub> الجديدة × رقم تقاطع صف ع<sub>1</sub> مع عمود البؤرة).

$$-6 = (1 \times 3) - \text{صفر}$$

$$-1 = (1 \times 1) - \text{صفر}$$

$$-\frac{3}{2} = (1 \times \frac{1}{2}) - 2$$

$$-1 = (1 \times \text{صفر}) - 1$$

$$\text{صفر} - \frac{1}{2} = (1 \times \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$$

وبالتالي تصبح قيم (ع<sub>1</sub>) الجديدة هي:

$$(3 ، \text{صفر} ، \frac{3}{2} ، 1 ، -\frac{1}{2})$$

9- اعداد جدول السمبلكس الثاني



## جدول السمبلكس الثانى

م ز	3	2	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2
صفر	1ع	3	صفر	$\frac{3}{2}$
3	س1	3	1	$\frac{1}{2}$
	ل ز	9	3	$\frac{3}{2}$
	م ز - ل ز		صفر	$\frac{1}{2}$
			صفر	$\frac{3}{2}$

لاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) فى خانة عمود المتغير (س2). وبالتالي نكرر الخطوات من (4) إلى (9) للوصول إلى جدول السمبلكس الثالث كما يلى:

1- تحديد المتغير الذى يدخل الحل: وهو المتغير (س2) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) ويطلق على عمود (س2) عمود البؤرة.

2- تحديد المتغير الذى يترك الحل: وهو المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب للأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود البؤرة.

• عند 1ع :  $3 \div \frac{3}{2} = 2 \leftarrow$  أقل ناتج قسمة موجب

• عند س1 :  $3 \div \frac{1}{2} = 6$

وبالتالى فإن المتغير (1ع) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (1ع) صف البؤرة.

3- تحديد رقم البؤرة: رقم البؤرة هو  $(\frac{3}{2})$ .

4- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س2) الذي يدخل الحل في جدول السمبلكس الثالث: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في صف البؤرة (صف المتغير ع1) على رقم البؤرة كما يلي:

$$2 = \frac{3}{2} \div 3, \text{ صفر} = \frac{3}{2} \div \text{صفر}, 1 = \frac{3}{2} \div \frac{3}{2}, \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \div 1, \frac{1}{3} - = \frac{3}{2} \div \frac{1}{2} -$$

وبالتالي فإن قيم الصف (س2) في الجدول الجديد هي:

$$(2, \text{ صفر}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} -)$$

5- تحديد قيم الصف (س1) في جدول السمبلكس الثالث:

قيم صف س1 الجديدة = قيم الصف س1 القديمة - (القيم المقابلة لصف س2 الجديدة × رقم تقاطع صف س1 مع عمود البؤرة)

$$1 = (\frac{1}{2} \times \text{صفر}) - 1, 2 = (\frac{1}{2} \times 2) - 3$$

$$\frac{1}{3} - = (\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}) - \text{صفر}, \text{صفر} = (\frac{1}{2} \times 1) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} -) - \frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن قيم الصف (س1) في الجدول الجديد هي:

$$(2, 1, \text{صفر}, \frac{1}{3} -, \frac{2}{3})$$

6- اعداد جدول السمبلكس الثالث:



### جدول السمبلكس الثالث

ريخ الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م ز			
			س1	س2	ع1	ع2
2	س2	2	صفر	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
3	س1	2	1	صفر	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	ل ز	10	3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	م ز - ل ز		صفر	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

ويتضح من جدول السمبلكس الثالث أنه جدول الحل الأمثل لأن كل القيم في الصف الأخير (م ز - ل ز) قيم صفرية أو سالبة ويتمثل الحل الأمثل فيما يلي:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{س1} = 2 \\ \text{س2} = 2 \end{array} \right. \leftarrow \text{متغيرات أساسية}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ع1} = \text{صفر} \\ \text{ع2} = \text{صفر} \end{array} \right. \leftarrow \text{متغيرات غير أساسية}$$

وأن ربح الحل هو (10) جنيه

وذلك يعنى أن جدول السمبلكس الثالث هو جدول الحل الأمثل والذي يقضى بإنتاج الشركة وحدتين من المنتج س1، ووحدتين من المنتج س2، وذلك يحقق أقصى ربح ممكن وهو (10) جنيه.

مثال (2):

حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{عظم (ر)} = 2\text{س1} + 2\text{س2}$$

في ظل أن:

$$3\text{س1} + 2\text{س2} \geq 6$$

$$س_1 + 2س_2 \leq 4$$

$$س_1, س_2 \leq \text{صفر}$$

### الحل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلي:

$$3س_1 + 2س_2 + ع_1 = 6 \quad (\text{حيث } ع_1 \text{ متغير عاطل}).$$

$$س_1 + 2س_2 - ف_1 + و_1 = 4 \quad (\text{حيث } ف_1 \text{ متغير فائض، و } و_1 \text{ متغير وهمي}).$$

2- ايجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{عظم (ر)} = 2س_1 + س_2 + \text{صفر } ع_1 + \text{صفر } ف_1 - م_1 + و_1$$

في ظل أن:

$$3س_1 + 2س_2 + ع_1 + \text{صفر } ف_1 + \text{صفر } و_1 = 6$$

$$س_1 + 2س_2 - ف_1 + و_1 = 4$$

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئي:

### جدول السمبلكس المبدئي

ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م			
			2	1	صفر	صفر - م
صفر	ع <sub>1</sub>	6	3	2	1	صفر
- م	و <sub>1</sub>	4	1	2	-1	1
	ل <sub>1</sub>	-4 م	- م	-2 م	صفر	- م
	م - ل <sub>1</sub>		2 + م	1 + 2 م	صفر	- م

4- تحديد المتغير الذي يدخل الحل: وهو المتغير (س<sub>2</sub>) صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف الأخير (م - ل<sub>1</sub> - ل<sub>2</sub>) ويطلق على عمود المتغير (س<sub>2</sub>) عمود البؤرة.



5- تحديد المتغير الذي يترك الحل: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة في عمود البؤرة (عمود المتغير س2) ثم نختار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلي:

• عند ع1 :  $3 = 2 \div 6$

• عند و1 :  $2 = 2 \div 4$  ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب.

وبالتالي فإن المتغير (و1) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (و1) صف البؤرة.

6- تحديد رقم البؤرة: وهو الرقم الذي يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة مع صف البؤرة، وهذا الرقم هو (2).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س2) الذي يدخل الحل في جدول السمبلكس الثاني: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة في صف البؤرة (صف المتغير و1) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح كما يلي:

$$4 = 2 \div 2, \quad 1 = 2 \div 2, \quad \frac{1}{2} = 2 \div 1, \quad 2 = 2 \div 2, \quad \text{صفر} = 2 \div \text{صفر}$$

$$-1 = 2 \div 1, \quad -\frac{1}{2} = 2 \div 1, \quad \frac{1}{2} = 2 \div 1$$

وبالتالي تصبح أرقام صف المتغير (س2) في الجدول الجديد كما يلي:

$$(2, \frac{1}{2}, 1, \text{صفر}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

8- تحديد قيم الصف (ع1) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم صف ع1 الجديدة = قيم الصف ع1 القديمة - (القيم المقابلة لصف س2

الجديدة × رقم تقاطع صف ع1 مع عمود البؤرة)

$$-6 = (2 \times 2) - 2$$

$$-3 = (2 \times \frac{1}{2}) - 2$$

$$-2 = (2 \times 1) - 2$$

$$1 - (\text{صفر} \times 2) = 1$$

$$\text{صفر} - (2 \times \frac{1}{2}) = 1$$

$$\text{صفر} - (2 \times \frac{1}{2}) = 1 -$$

وبالتالى فإن قيم الصف (1ع) فى الجدول الجديد هى:

(2 ، 2 ، صفر ، 1 ، 1 ، 1-)

9- اعداد جدول السمبلكس الثانى:

### جدول السمبلكس الثانى

م ز			2	1	صفر	صفر	- م
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ف <sub>1</sub>	و <sub>1</sub>
صفر	ع <sub>1</sub>	2	2	صفر	1	1	1-
1	س <sub>2</sub>	2	$\frac{1}{2}$	1	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	ل ز	2	$\frac{1}{2}$	1	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	م ز- ل ز		$\frac{3}{2}$	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ م -

لاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيم موجبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) وبالتالى يستكمل الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

- 1- تحديد المتغير الذى يدخل الحل وهو المتغير (س<sub>1</sub>) صاحب أكبر قيمة موجبة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) ويطلق على عمود (س<sub>1</sub>) عمود البؤرة.
- 2- تحديد المتغير الذى يترك الحل:

• عند ع<sub>1</sub> :  $2 \div 2 = 1 \leftarrow$  صاحب أقل ناتج قسمة موجب

• عند س<sub>2</sub> :  $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

∴ المتغير (ع<sub>1</sub>) يترك الحل ويترك على صف (ع<sub>1</sub>) صف البؤرة.

3- تحديد رقم البؤرة: هو الرقم (2).



4- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير (س<sub>1</sub>) الذي يدخل الحل في جدول السمبلكس الثالث: وذلك عن طريق قسمة الأرقام الموجودة في صف البؤرة (صف المتغير ع<sub>1</sub>) على رقم البؤرة وذلك لتحويل رقم البؤرة إلى واحد صحيح كما يلي:

$$1 = 2 \div 2, 1 = 2 \div 2, \text{ صفر} = 2 \div 2, \frac{1}{2} = 2 \div 1,$$

$$\frac{1}{2} - = 2 \div 1 - , \frac{1}{2} = 2 \div 1$$

وبالتالي فإن قيم الصف (س<sub>1</sub>) في الجدول الجديد هي:

$$(1, 1, \text{ صفر}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} -).$$

5- تحديد قيم الصف (س<sub>2</sub>) في جدول السمبلكس الثالث:

قيم صف س<sub>2</sub> الجديدة = قيم الصف س<sub>2</sub> القديمة - (القيم المقابلة لصف س<sub>1</sub>

الجديدة × رقم تقاطع صف س<sub>2</sub> مع عمود البؤرة)

$$\frac{3}{2} = (\frac{1}{2} \times 1) - 2$$

$$\text{صفر} = (\frac{1}{2} \times 1) - \frac{1}{2}$$

$$1 = (\frac{1}{2} \times \text{صفر}) - 1$$

$$\frac{1}{4} - = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) - \text{صفر}$$

$$\frac{3}{4} - = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} -$$

$$\frac{3}{4} = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} -) - \frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن قيم الصف (س<sub>2</sub>) في الجدول الجديد هي:

$$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4} - , \frac{1}{4} - , 1, \text{ صفر}, \frac{3}{4})$$

6- اعداد جدول السمبلكس الثالث:

### جدول السمبلكس الثالث

م -	صفر	صفر	1	2	م ز		
					قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	ربح الوحدة
1 و	1 ف	1 ع	2 س	1 س	1	1 س	2
$\frac{1}{2} -$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	1	$\frac{3}{2}$	2 س	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} -$	$\frac{1}{4} -$	1	صفر	$\frac{7}{2}$	ل ز	
$\frac{1}{4} -$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	2			
$\frac{1}{4} + م -$	$\frac{1}{4} -$	$\frac{3}{4} -$	صفر	صفر			

يتضح من جدول السمبلكس الثالث أن كل القيم الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) هي قيم سالبة أو صفرية وبالتالي يعد جدول الحل الثالث هو جدول الحل الأمثل ويتضح منه أن الحل الأمثل هو:

$$س = 1 ، 1 = 2 س ، \frac{3}{2} = 1 ع ، 1 = 1 ف ، 1 = 1 صفر .$$

وأن أقصى ربح يمكن تحقيقه هو  $(\frac{7}{2})$  جنيه .

ثانياً: استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تدنية التكاليف:

توجد بعض الاختلافات التي يجب مراعاتها عند استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تدنية التكاليف بالمقارنة باستخدام أسلوب السمبلكس في حل مشاكل تعظيم الربح وهذه الاختلافات تتمثل فيما يلي:

- 1- يظهر المتغير الوهمي (و) في دالة الهدف في حالة تعظيم الربح بقيمة (-م)، أما في دالة الهدف في حالة تدنية التكاليف فيظهر بقيمة (+م).
- 2- لاستكمال خطوات الحل للوصول إلى الحل الأمثل يتم اختيار المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف الأخير (م ز - ل ز) في حالة تعظيم الربح، أما في حالة تدنية التكاليف فيتم اختيار المتغير صاحب أكبر رقم أمامه



إشارة سالبة في الصف الأخير (م ز - ل ز) ليدخل الحل ليساهم في تخفيض التكاليف بأكبر قدر ممكن.

3- نصل إلى الحل الأمثل في حالة مشكلة تعظيم الربح إذا كانت كل الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) في جدول السمبلكس كلها قيم صفرية أو سالبة، بينما نصل إلى الحل الأمثل في حالة مشكلة تدنية التكاليف إذا كانت كل الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) في جدول السمبلكس كلها قيم صفرية أو موجبة.

مثال (3):

حاول أن تحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{تدنية (ت) } = 5\text{س} + 6\text{س} + 2\text{س}$$

في ظل أن:

$$9 \geq 3\text{س} + 1\text{س}$$

$$8 \leq 4\text{س} + 2\text{س}$$

$$10 = 5\text{س} + 1\text{س}$$

$$\text{س} + 1\text{س} \leq 2\text{س} \leq \text{صفر}$$

### الحل

1- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) كما يلي:

$$\text{س} + 3\text{س} + 2\text{س} + 1\text{ع} = 9 \quad (\text{حيث } 1\text{ع متغير عاطل}).$$

$$4\text{س} - 2\text{س} - 1\text{ف} + 1\text{و} = 8 \quad (\text{حيث } 1\text{ف متغير فائض، و } 1\text{و متغير وهمي}).$$

$$5\text{س} + 1\text{و} + 2\text{و} = 10 \quad (\text{حيث } 2\text{و متغير وهمي}).$$

2- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{تدنية (ت) } = 5\text{س} + 6\text{س} + 2\text{س} + \text{صفر } 1\text{ع} + \text{صفر } 1\text{ف} + 1\text{و} + 1\text{م} + 2\text{و}$$

في ظل أن:

$$\text{س} + 3\text{س} + 2\text{س} + 1\text{ع} + \text{صفر } 1\text{ف} + \text{صفر } 1\text{و} + \text{صفر } 2\text{و} = 9$$

$$\begin{aligned} \text{صفر س}_1 + 4 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 - \text{ف}_1 + \text{و}_1 + \text{صفر و}_2 &= 8 \\ \text{س}_1 + \text{صفر س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ف}_1 + \text{و}_1 + \text{و}_2 &= 10 \end{aligned}$$

3- اعداد جدول الحل المبدئي:

جدول السمبلكس المبدئي

م		6	5	صفر	صفر	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ف <sub>1</sub>	و <sub>1</sub>	و <sub>2</sub>
صفر	ع <sub>1</sub>	9	1	3	1	صفر	صفر	صفر
م	و <sub>1</sub>	8	صفر	4	صفر	1-	1	صفر
م	و <sub>2</sub>	10	5	صفر	صفر	صفر	صفر	1
	ل <sub>1</sub>	18م	5م	4م	صفر	م-	م	م
	م <sub>1</sub> - ل <sub>1</sub>	5-5م	6-4م	صفر	م	صفر	صفر	صفر

4- تحديد المتغير الذي يدخل الحل: وهو المتغير (س<sub>1</sub>) صاحب أكبر قيمة سالبة (أكبر رقم أمامه إشارة سالبة) في الصف الأخير (م<sub>1</sub> - ل<sub>1</sub>) ويطلق على عمود المتغير (س<sub>1</sub>) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذي يترك الحل، وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة في عمود المتغير الذي يدخل الحل (س<sub>1</sub>) (عمود البؤرة) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلي:

- عند ع<sub>1</sub> :  $9 : 1 \div 9 = 1$
  - عند و<sub>1</sub> :  $8 \div \text{صفر} = \text{ليس لها معنى}$
  - عند و<sub>2</sub> :  $10 \div 5 = 2 \leftarrow$  صاحب أقل ناتج قسمة موجب
- وبالتالي فإن المتغير (و<sub>2</sub>) يترك الحل، ويطلق على صف المتغير (و<sub>2</sub>) صف البؤرة.



6- تحديد رقم البؤرة وهو الرقم الذى يمثل نقطة تقاطع عمود البؤرة (س<sub>1</sub>) مع صف البؤرة (و<sub>2</sub>) ورقم البؤرة هو الرقم (5).

7- تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الجديد الذى يدخل الحل فى جدول السمبلكس الثانى وهو المتغير (س<sub>1</sub>): وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى صف المتغير الذى يترك الحل (و<sub>2</sub>) على رقم البؤرة لتحويل رقم البؤرة إلى الواحد الصحيح كما يلى:

$$10 \div 5 = 2, 5 \div 5 = 1, \text{ صفر} \div 5 = \text{صفر}, \text{ صفر} \div 5 = \text{صفر},$$

$$\text{صفر} \div 5 = \text{صفر}, \text{ صفر} \div 5 = \text{صفر}, 1 \div 5 = \frac{1}{5}$$

وبالتالى تصبح قيم الصف (س<sub>1</sub>) فى جدول السمبلكس الثانى هى: (2, 1, صفر, صفر, صفر, صفر,  $\frac{1}{5}$ ).

8- تحديد قيم الصف (ع<sub>1</sub>) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

قيم صف ع<sub>1</sub> الجديدة = قيم الصف ع<sub>1</sub> القديمة - (القيم المقابلة لصف س<sub>1</sub> الجديدة × رقم تقاطع صف ع<sub>1</sub> مع عمود البؤرة)

$$9 - (1 \times 2) = 7$$

$$1 - (1 \times 1) = \text{صفر}$$

$$3 - (\text{صفر} \times 1) = 3$$

$$1 - (\text{صفر} \times 1) = 1$$

$$\text{صفر} - (\text{صفر} \times 1) = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - (\text{صفر} \times 1) = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - (1 \times \frac{1}{5}) = -\frac{1}{5}$$

وبالتالى تصبح قيم الصف (ع<sub>1</sub>) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

$$(7, \text{صفر}, 3, 1, \text{صفر}, \text{صفر}, -\frac{1}{5}).$$

9- تحديد قيم الصف (و<sub>1</sub>) فى جدول السمبلكس كما يلى:

قيم صف و 1 الجديدة = قيم الصف و 1 القديمة - (القيم المقابلة لصف س 1 الجديدة × رقم تقاطع صف و 1 مع عمود البؤرة)

$$8 - (2 \times \text{صف}) = 8$$

$$\text{صف} - (1 \times \text{صف}) = \text{صف}$$

$$4 - (\text{صف} \times \text{صف}) = 4$$

$$\text{صف} - (\text{صف} \times \text{صف}) = \text{صف}$$

$$1 - (\text{صف} \times \text{صف}) = 1 -$$

$$1 - (\text{صف} \times \text{صف}) = 1$$

$$\text{صف} - \left( \frac{1}{5} \times \text{صف} \right) = \text{صف}$$

وبالتالى تصبح قيم الصف ( و 1) فى جدول السمبلكس الثانى كما يلى:

(8 ، صف ، 4 ، صف ، 1- ، 1 ، صف)

لاحظ أن: قيم الصف ( و 1) فى جدول السمبلكس الثانى هى نفسها قيم الصف ( و 1) فى جدول السمبلكس المبدئى لأن نقطة تقاطع الصف ( و 1) مع عمود البؤرة (س 1) = صف.

10- اعداد جدول السمبلكس الثانى:

### جدول السمبلكس الثانى

م		م		صف	صف	6	5	م		
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س 1	س 2	ع 1	ف 1	و 1	و 2	م	م
صف	ع 1	7	صف	3	1	صف	صف	$-\frac{1}{5}$	صف	و 2
م	و 1	8	صف	4	صف	1-	1	صف	م	و 1
5	س 1	2	1	صف	صف	صف	صف	$\frac{1}{5}$	صف	و 1
ل ز		8 م + 10	5	4 م	صف	م -	م	1	م	و 1
م ز - ل ز			صف	4 - 6 م	صف	م	صف	م - 1	صف	و 1



لاحظ أن جدول السمبلكي الثاني ليس هو جدول الحل الأمثل لوجود قيمة سالبة في الصف الأخير (م ز - ل ز) في خانة عمود المتغير (س2) وبالتالي نستكمل الحل حتي الوصول إلي الحل الأمثل كما يلي:

1- تحديد المتغير الذي يدخل الحل وهو المتغير (س2) ويطلق على عمود المتغير (س2) عمود البؤرة.

2- تحديد المتغير الذي يترك الحل وهو المتغير (و1) ويطلق على صف المتغير (و1) صف البؤرة.

3- تحديد رقم البؤرة وهو نقطة تقاطع عمود البؤرة (س2) مع صف البؤرة (و1) ورقم البؤرة هو (4).

4- تحدد القيمة الجديدة لصف المتغير الجديد (س2) في جدول السمبلكس الثالث وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في صف المتغير الذي يترك الحل (و1) على رقم البؤرة.

وتصبح قيم الصف (س2) في جدول السمبلكس الثالث كما يلي:  
(2، صفر، 1، صفر، -  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$ ، صفر).

5- تحديد قيم الصف (س1) في جدول السمبلكس الثالث وهي:  
(2، 1، صفر، صفر، صفر، صفر،  $\frac{1}{5}$ ).

6- تحديد قيم الصف (ع1) في جدول السمبلكس الثالث وهي:  
(1، صفر، صفر، 1،  $\frac{3}{4}$ ، -  $\frac{3}{4}$ ، -  $\frac{1}{5}$ ).

7- اعداد جدول السمبلكس الثالث:

### جدول السمبلكس الثالث

م ز		5	6	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ف1	و1
صفر	ع1	1	صفر	صفر	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
6	س2	2	صفر	1	صفر	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
5	س1	2	1	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{5}$
	ل ر	22	5	6	صفر	$-\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$
	م ز - ل ر		صفر	صفر	صفر	$\frac{6}{4}$	$-\frac{6}{4}$
						م - 1	م - 1

يتضح من جدول السمبلكس الثالث أن كل القيم الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ر) هي قيم موجبة أو صفرية وبالتالي يعد جدول السمبلكس الثالث هو جدول الحل الأمثل، ويتمثل الحل في: س1 = 2 ، س2 = 2 ، ع1 = 1 أى توجد طاقة عاطلة مقدارها وحدة واحدة. وأقل تكلفة هي (22) جنيه.

بعض المشاكل الخاصة عند استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشكلات البرمجة الخطية:

المشكلة الأولى: حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) في الصف الأخير: تظهر هذه المشكلة عند اختيار المتغير الذى يدخل الحل عند القيام بخطوات تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، حيث تنص القاعدة على اختيار المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة في حالة تعظيم الربح، واختيار المتغير صاحب أكبر قيمة سالبة (أكبر رقم أمامه إشارة سالبة) في حالة تدنية التكاليف ونواجه أحياناً مشكلة عندما تتعادل القيم الموجبة أو السالبة الخاصة بالمتغيرات



الغير أساسية المرشحة لأن تدخل الحل لتعتبر متغيرات أساسية وفي مثل هذه الحالة يمكن أن يتم الاختيار من بينها بشكل تحكّمي.

فاختيار أى من هذه المتغيرات سوف يوصل فى النهاية إلى الحل الأمثل بعد خطوات معينة، ولكن يفضل حتى يمكن تقليل عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل إتباع النصائح التالية:

1- إذا كان التعادل بين متغيراً أصلياً (س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ، ..... ) ومتغيراً إضافياً (ع<sub>1</sub> ، ع<sub>2</sub> ..... ) فيفضل اختيار المتغير الأصلي لأن يدخل الحل.

2- إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين (س<sub>1</sub>، س<sub>2</sub> ..... ) فيتم اختيار أى منهما بطريقة عشوائية.

3- إذا كان التعادل بين متغيرين إضافيين (ع<sub>1</sub> ، ع<sub>2</sub> ..... ) فيتم اختيار أى منهما بطريقة عشوائية.

**المشكلة الثانية: مشكلة عدم الانتظام:**

يعتبر الحل غير منتظم أو تظهر حالة عدم الانتظام فى مشاكل البرمجة الخطية عندما يوجد أحد القيود المتكررة وغير الضرورية فمثلاً لو حدث أن:

$$س_1 \geq 20$$

$$س_2 \geq 20$$

$$س_1 + س_2 \geq 40$$

فى مثل هذه الحالة يعتبر القيد الثالث غير ضرورياً.

ويتم اكتشاف حالة عدم الانتظام عند تحديد المتغير الذى يترك الحل وذلك بقسمة الأرقام الموجودة فى عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة فى عمود البؤرة، ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب. ويحدث أحياناً أن يتعادل خارج القسمة لمتغيرين أو أكثر، والخطوة الأساسية فى هذه الحالة هى أن يتم اختيار أحد المتغيرات الذى يترك الحل عشوائياً وقد ينتج عن ذلك الوصول إلى حل جديد فى جدول السمبلكس التالى قيمة أحد المتغيرات

الأساسية فيه تعادل الصفر ويظهر ذلك من عمود قيم متغيرات الحل. ويمكن توضيح حالة عدم الانتظام من خلال المثال التالي:

مثال (4):

$$\text{عظم (ر)} = 80 \text{ س}_1 + 70 \text{ س}_2$$

في ظل أن:

$$2 \text{ س}_1 + \text{س}_2 \geq 120$$

$$\text{س}_1 \geq 70$$

$$\text{س}_1 + 2 \text{ س}_2 \geq 60$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحل

أولاً: حل المشكلة باستخدام أسلوب السمبلكس:

1- تحويل المتباينات إلى متساويات

$$2 \text{ س}_1 + \text{س}_2 + \text{ع}_1 = 120 \quad \leftarrow \text{ع}_1 \text{ متغير عاطل.}$$

$$\text{س}_1 + 2 \text{ ع}_2 = 70 \quad \leftarrow \text{ع}_2 \text{ متغير عاطل}$$

$$\text{س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ ع}_3 = 60 \quad \leftarrow \text{ع}_3 \text{ متغير عاطل}$$

2- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{(ر)} = 80 \text{ س}_1 + 70 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3$$

في ظل أن:

$$2 \text{ س}_1 + \text{س}_2 + \text{ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = 120$$

$$\text{س}_1 + \text{صفر س}_2 + \text{ع}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_3 = 70$$

$$\text{س}_1 + 2 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{ع}_3 = 60$$



### 3- اعداد جدول السمبلكس المبدئي:

#### جدول السمبلكس المبدئي

م ز			80	70	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ع2	ع3
صفر	ع1	120	2	1	1	صفر	صفر
صفر	ع2	70	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع3	60	1	1	صفر	صفر	1
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	ل ز - ل ز		80	70	صفر	صفر	صفر

4- تحديد المتغير الذي يدخل الحل: وهو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف (م ز - ل ز) وهو المتغير (س1) ويطلق على عمود المتغير (س1) عمود البؤرة.

5- تحديد المتغير الذي يترك الحل: وذلك بقسمة الأرقام الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على الأرقام المقابلة في عمود المتغير الذي يدخل الحل (س1) (عمود البؤرة) ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب ليترك الحل كما يلي:

• عند ع1 :  $120 \div 2 = 60$

• عند ع2 :  $70 \div 1 = 70$

• عند ع3 :  $60 \div 1 = 60$

ويلاحظ تساوي ناتج القسمة الموجب لكل من المتغيرين ع1 ، ع3 ،

فإذا قمنا باختيار (ع1) كمتغير يترك الحل ← صف البؤرة فماذا سيحدث ؟

(س1) يحل محل (ع1) ورقم البؤرة هو الرقم (2).

6- تحديد قيم الصف (س1) في جدول السمبلكس الثاني: وذلك بقسمة قيم

الصف ع1 ÷ رقم البؤرة

∴ قيم (س1) الجديدة هي: [ 60 ، 1 ،  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2}$  ، صفر ، صفر ]

7- تحديد قيم الصف (ع2) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم الصف ع2 الجديدة = قيم الصف ع2 القديمة - (القيم المقابلة لصف س1 الجديدة × رقم تقاطع صف ع2 مع عمود البؤرة)

$$10 = (1 \times 60) - 70$$

$$\text{صفر} = (1 \times 1) - 1$$

$$\frac{1}{2} - = (1 \times \frac{1}{2}) - \text{صفر}$$

$$\frac{1}{2} - = (1 \times \frac{1}{2}) - \text{صفر}$$

$$1 = (1 \times \text{صفر}) - 1$$

$$\text{صفر} - = (1 \times \text{صفر}) - \text{صفر}$$

∴ قيم (ع2) الجديدة هي: [ 10 ، صفر ،  $\frac{1}{2} -$  ،  $\frac{1}{2} -$  ، 1 ، صفر ]

8- تحديد قيم الصف (ع3) في جدول السمبلكس الثاني:

قيم الصف ع3 الجديدة = قيم الصف ع3 القديمة - (القيم المقابلة لصف س1 الجديدة × رقم تقاطع صف ع3 مع عمود البؤرة)

$$60 = (1 \times 60) - \text{صفر}$$

$$1 = (1 \times 1) - \text{صفر}$$

$$\frac{1}{2} = (1 \times \frac{1}{2}) - 1$$

$$\frac{1}{2} - = (1 \times \frac{1}{2}) - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - = (1 \times \text{صفر}) - \text{صفر}$$

$$1 = (1 \times \text{صفر}) - 1$$

∴ قيم (ع3) الجديدة هي: [ صفر ، صفر ،  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} -$  ، صفر ، 1 ]

8- اعداد جدول السمبلكس الثاني:



## جدول السمبلكس الثاني

م ز			80	70	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ع2	ع3
80	س1	60	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر
صفر	ع2	60	صفر	$\frac{1}{2} -$	$\frac{1}{2} -$	1	صفر
صفر	ع3	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} -$	صفر	1
ل ز	480	80	40	40	صفر	صفر	صفر
م ز - ل ز	صفر	صفر	30	40 -	صفر	صفر	صفر

∴ وفي هذا الجدول يلاحظ ان قيمة المتغير الأساسي ع3 = صفر وهذا مخالف للخاصية الأساسية التي ذكرناها في الحل الأساسي وهو أن تكون قيم المتغيرات الغير أساسية هي التي تساوى صفر. ولكن ماذا يحدث إذا قمنا بإيجاد جدول السمبلكس الثالث عن طريق إدخال (س2) للحل

∴ تحديد المتغير الذي يترك الحل:

- عند س1 :  $60 \div \frac{1}{2} = 120$
  - عند ع2 :  $10 \div \frac{1}{2} - = 20 -$  ← خارج الاختيار
  - عند ع3 : صفر  $\div \frac{1}{2} =$  صفر ← يترك الحل
- ∴ (س2) يحل محل (ع3) ورقم البؤرة هو  $(\frac{1}{2})$ .

ومع استكمال الحل نصل إلى جدول السمبلكس الثالث كما يلي:

### جدول السمبلكس الثالث

م		80	70	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ع <sub>2</sub>
80	س <sub>1</sub>	60	1	صفر	1	صفر
صفر	ع <sub>2</sub>	10	صفر	صفر	1-	1
70	س <sub>2</sub>	صفر	صفر	1	1-	صفر
	ل	480	80	70	10	صفر
	م - ل		صفر	صفر	10-	صفر

ويتضح من جدول السمبلكس الثالث أن

س<sub>1</sub> = 60 ، ع<sub>2</sub> = 10 ، س<sub>2</sub> = صفر ، ع<sub>1</sub> = صفر ، ع<sub>3</sub> = صفر

لاحظ أن الربح المحقق في جدول السمبلكس الثاني = الربح المحقق في جدول السمبلكس الثالث = 480 جنيه.

ويعنى ذلك أننا نغير الحل دون أن يتغير أو يتحسن رقم الربح ومن هنا إذا حاولنا تحسين الحل الأخير الذى ينتج عن جدول السمبلكس الثالث سوف تجد أننا نعود فى جدول السمبلكس الرابع إلى ذات الحل الذى توصلنا إليه فى جدول السمبلكس الثانى.

وتعرف هذه الخاصية بمشكلة أن تكرر نفس الحلول ونعود إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل.

**خصائص مشكلة عدم الانتظام:**

- 1- لا تمثل هذه الخاصية أى مشكلة عند حل المشكلة بالطريقة البيانية.
- 2- إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفرية فى عمود قيم متغيرات الحل فى جدول السمبلكس النهائى فإن ذلك لا يمثل أى مشكلة، أما إذا ظهر بقيمة صفرية فى أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائى فإن الحل قد يواجه



مشكلة تكرار نفس الحلول والعودة إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل ولكن في أحيان كثيرة قد لا تحدث هذه المشكلة.

**الخلاصة:** إذا حدثت مشكلة عدم الانتظام فإننا يجب أن نرجع إلى المشكلة الأساسية للبرمجة الخطية ونقوم بصياغتها مرة ثانية مع استبعاد القيد الزائد والذي يعتبر غير ضروري بالنسبة للحل.

ومما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أن حالة عدم الانتظام تمثل مشكلة حقيقية إذا حدثت قبل الوصول إلى الحل الأمثل. هذا ولحل هذه المشكلة فإن بعض الكتاب والباحثين في بحوث العمليات يقترحوا أنه يفضل اختيار الصف الأعلى من الصفوف المتساوية ليمثل صف المتغير الذي يترك الحل (صف البؤرة).

**المشكلة الثالثة: حالة وجود أكثر من حل أمثل:**

تظهر هذه الحالة في ظل استخدام أسلوب السمبلكس في حالة وجود صفر في الصف الأخير (م ز - ل ز) تحت واحد أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية، وذلك مخالف للقاعدة الأساسية التي تدل على أن قيم المتغيرات الأساسية في الصف الأخير (م ز - ل ز) قيم صفرية.

حينما يظهر أحد المتغيرات الغير أساسية بقيمة صفرية في الصف الأخير (م ز - ل ز) فإننا يمكننا إدخال هذا المتغير الغير أساسى إلى الحل ويترتب على ذلك عدم التأثير على:

أ- الربح المحقق زيادة أو نقصاً.

ب- التكلفة المتحققة زيادة أو نقصاً.

وهذا يعنى أنه يمكن تحقيق نفس الربح أو التكلفة بمجموعة جديدة من قيم المتغيرات وذلك يعتبر ميزة لمتخذ القرار حيث تتسع الفرصة أمامه لتحديد توليفة المتغيرات.

مثال (5):

$$\text{عظم (ر)} = 1\text{س} + 2\text{س} + 3\text{س}$$

في ظل أن:

$$10 \geq 1\text{س} + 2\text{س} + 3\text{س}$$

$$5 \geq 1\text{س} + 2\text{س}$$

$$1 \geq 1\text{س}$$

$$1\text{س}, 2\text{س}, 3\text{س} \leq \text{صفر}$$

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحل

1- تحويل المتباينات إلى متساويات:

$$10 = 1\text{س} + 2\text{س} + 3\text{س} + 1\text{ع}$$

$$5 = 1\text{س} + 2\text{س} + 2\text{ع}$$

$$1 = 1\text{س} + 3\text{ع}$$

2- ايجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{ر) } = 1\text{س} + 2\text{س} + 3\text{س} + \text{صفر } 1\text{ع} + \text{صفر } 2\text{ع} + \text{صفر } 3\text{ع}$$

في ظل أن:

$$10 = 1\text{س} + 2\text{س} + 3\text{س} + 1\text{ع} + \text{صفر } 2\text{ع} + \text{صفر } 3\text{ع}$$

$$5 = 1\text{س} + 2\text{س} + \text{صفر } 3\text{س} + \text{صفر } 1\text{ع} + 2\text{ع} + \text{صفر } 3\text{ع}$$

$$1 = 1\text{س} + \text{صفر } 2\text{س} + \text{صفر } 3\text{س} + \text{صفر } 1\text{ع} + \text{صفر } 2\text{ع} + 3\text{ع}$$

3- اعداد جدول الحل المبدئي:



### جدول السمبلكس المبدئي

م ر			1	2	3	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
صفر	ع1	10	1	2	3	1	صفر	صفر
صفر	ع2	5	1	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع3	1	1	صفر	صفر	صفر	صفر	1
ل ر			صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
م ر - ل ر			1	2	3	صفر	صفر	صفر

ويمكن اعداد جدول الحل الثاني كما يلي:

### جدول السمبلكس الثاني

م ر			1	2	3	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
3	س3	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	صفر	صفر
صفر	ع2	5	1	1	صفر	صفر	1	صفر
صفر	ع3	1	1	صفر	صفر	صفر	صفر	1
ل ر			10	2	3	1	صفر	صفر
م ر - ل ر			صفر	صفر	صفر	1-	صفر	صفر

لاحظ أن جدول السمبلكس الثاني هو جدول الحل الأمثل وفيه:

$$\text{س3} = \frac{10}{3}, \text{ع2} = 5, \text{ع3} = 1, \text{س1} = 1, \text{صفر} = \text{س2}, \text{صفر} = \text{ع1}$$

ولكن يلاحظ أن قيمة المتغيرين الغير أساسيين س1 ، س2 في الصف الأخير (م ر - ل ر) قيم صفرية، وهذا يعنى أنه يمكن إدخال أحدهما إلى الحل مما يترتب عليه عدم تغيير رقم الربح ولكن الذى سيتغير هو توليفة المنتجات من المتغيرات كما هو موضح فى جدول السمبلكس الثالث.

بإدخال المتغير (س1) إلى الحل و (ع3) يترك الحل

قيم (س1) = قيم ع3 ÷ رقم البؤرة (1)

قيم (س1): [ 1 ، 1 ، صفر ، صفر ، صفر ، صفر ، 1 ]

قيم (س3): [ 3 ، صفر ،  $\frac{2}{3}$  ، 1 ،  $\frac{1}{3}$  ، صفر ،  $-\frac{1}{3}$  ]

قيم (ع2): [ 4 ، صفر ، 1 ، صفر ، صفر ، 1 ، -1 ]

ثم يتم اعداد جدول السمبلكس الثالث هو كما يلي:

جدول السمبلكس الثالث

م ر		1	2	3	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع2	ع3
3	س3	3	صفر	$\frac{2}{3}$	1	صفر	$-\frac{1}{3}$
صفر	ع2	4	صفر	1	صفر	1	-1
1	س1	1	1	صفر	صفر	صفر	1
	ل ر	10	1	2	3	1	صفر
	م ر - ل ر		صفر	صفر	صفر	-1	صفر

ويلاحظ أن جدول السمبلكس الثالث أيضاً جدول حل أمثل وريج الحل المحقق يساوى ريج الحل المحقق فى جدول السمبلكس الثانى (حل أمثل أيضاً) = (10) جنيه وهذا يعنى وجود أكثر من حل أمثل دون تحسين فى رقم الريج ويعنى ذلك إمكانية تكرار الحل الأمثل دون حدوث أى تغير فى رقم الريج. ولكن الاختلاف بين الحل الأمثل الأول (جدول السمبلكس الثانى) والحل الأمثل الثانى (جدول السمبلكس الثالث) هو حجم الإنتاج من كل من (س1، س2، س3)، حيث فى الحل الأمثل الأول يتم إنتاج  $(\frac{10}{3})$  من (س3)، بينما فى الحل الأمثل الثانى يتم إنتاج : س3 = 3 وحدات، س2 = صفر، س1 = وحدة واحدة.

ويلاحظ فى الحل الأمثل الثانى (جدول السمبلكس الثالث) يوجد المتغير (س2) وهو أحد المتغيرات غير الأساسية قيمته فى الصف الأخير (م ر - ل ر) =



صفر ومعنى ذلك أنه يمكن أن يدخل للحل مرة أخرى دون أن يغير من قيمة الحل النهائي وهي (10) جنيه.

ومن هنا نلاحظ أنه عند الحل الأمثل

في جدول السمبلكس الثانى (س1) = صفر، (س2) = صفر، (س3) =  $\frac{10}{3}$

في جدول السمبلكس الثانى (س1) = 1، (س2) = صفر، (س3) = 3

ومن هنا يلاحظ أنه فى الحلين أنه لم يحدث تغيير فى رقم الربح ولكن الذى سيتغير هو توليفة المنتجات.

فى النهاية تجد الإشارة إلى أن وجود أكثر من حل أمثل يعطى الفرصة للإدارة لاختيار تلك التوليفة من المنتجات والتي تتناسب مع ظروف الشركة وموقفها دون أن تضحي بأى قيمة فى الربح أو التكلفة.

**المشكلة الرابعة: مشكلة عدم وجود حل ممكن:**

تظهر هذه المشكلة إذا تم التوصل إلى الحل الأمثل وكان هناك واحداً أو أكثر من المتغيرات الوهمية (و) ضمن المتغيرات الأساسية وهذا يعنى عدم وجود أى حل ممكن لهذه المشكلة بشرط أن تكون قيمة المتغير الوهمى فى عمود قيم متغيرات الحل موجبة أما إذا ظهرت قيمة المتغير الوهمى بصفر فإن هذه لا تعد حالة عدم إمكانية وجود حل أمثل.

**مثال (6):**

$$\text{عظم (ر) } = 3\text{س}1 + 2\text{س}2 + 3\text{س}3$$

فى ظل أن:

$$2\text{س}1 + 2\text{س}2 + 3\text{س}3 \geq 2$$

$$3\text{س}1 + 4\text{س}2 + 2\text{س}3 \leq 9$$

$$\text{س}1, \text{س}2, \text{س}3 \leq \text{صفر}$$

**المطلوب:** حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا

تلاحظ؟

## الحل

1- تحويل المتباينات إلى متساويات:

$$2 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 + 3 \text{ س } 3 + 1 \text{ ع } 1 = 2$$

$$3 \text{ س } 1 + 4 \text{ س } 2 + 2 \text{ س } 3 - 1 \text{ ف } 1 + 1 \text{ و } 1 = 9$$

2- ايجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$(ر) = 3 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 + 3 \text{ س } 3 + \text{صفر ع } 1 + \text{صفر ف } 1 - \text{م } 1 \text{ و } 1$$

في ظل أن:

$$2 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 + 3 \text{ س } 3 + 1 \text{ ع } 1 + \text{صفر ف } 1 + \text{صفر و } 1 = 2$$

$$3 \text{ س } 1 + 4 \text{ س } 2 + 2 \text{ س } 3 - 1 \text{ ع } 1 + \text{صفر ف } 1 + 1 \text{ و } 1 = 9$$

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئي:

### جدول السمبلكس المبدئي

م -	صفر	صفر	3	2	3	م ر		
و	ف	ع	س	س	س	قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	ربح الوحدة
صفر	صفر	1	1	1	2	2	1ع	صفر
1	1-	صفر	2	4	3	9	1و	م -
م -	م	صفر	2- م	4- م	3- م	9- م	ل ر	
صفر	م -	صفر	2+3 م	4+2 م	3+3 م	م ر - ل ر		

ويلاحظ من الحل السابق أن المتغير الذي سيدخل للحل الجديد (صاحب أكبر قيمة موجبة) وهو المتغير (س2).

المتغير الذي يترك الحل هو المتغير (1ع) صاحب أقل ناتج قسمة موجب

∴ قيم (س2) الجديدة: قسمة قيم 1ع ÷ رقم البؤرة (1)

$$= [2, 2, 1, 1, 1, \text{صفر}, \text{صفر}]$$

∴ قيم (و1) = [1, -5, -2, -4, -1, 1, 1].



## جدول السمبلكس الثانى

م -	صفر	صفر	3	2	3	م ر		
						قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	ربح الوحدة
1 و	ف <sub>1</sub>	ع <sub>1</sub>	س <sub>3</sub>	س <sub>2</sub>	س <sub>1</sub>	2	س <sub>2</sub>	2
صفر	صفر	1	1	1	2	1	1 و	م -
1	1 -	4 -	2 -	صفر	5 -	م - 4	ل ر	
م -	م	4 + 2 م	2 + 2 م	2	5 + 4 م	م ر - ل ر		
صفر	م -	4 - 2 م	2 - 1 م	صفر	5 - 1 - م			

ويلاحظ من جدول السمبلكس الثانى أننا توصلنا إلى الحل الأمثل لأن كل القيم صفيرية أو سالبة فى الصف الأخير (م ر - ل ر)، ولكن يلاحظ وجود المتغير الوهمى (و<sub>1</sub>) فى الحل الأمثل وله قيمة موجبة قدرها (1) وهذا أمر يشير إلى مواجهة مشكلة عدم وجود حل ممكن. ويطلق على الحل الذى توصلنا إليه بالحل (المثالى المسبق).

**المشكلة الخامسة: مشكلة الحل غير المحدد (عدم وجود منطقة حلول ممكنة):**

تظهر هذه المشكلة عند تحديد المتغير الذى يترك الحل وذلك بقسمة قيم متغيرات الحل على المعاملات الموجبة فى عمود البؤرة والذى يحدث أحياناً أنه لا توجد قيم موجبة فى عمود البؤرة بمعنى أن كل القيم إما صفيرية أو سالبة وفى هذا الحالة تعتبر المشكلة غير محدودة.

**السبب فى ظهور هذه المشكلة هو ما يلى:**

1- قيام الشخص الذى يبنى النموذج باستبعاد بعض القيود غير المتكررة وعدم أخذها فى الحسبان.

2- أن معاملات المتغيرات (أو بعضها) والتى توجد فى معادلات القيود لم يتم تقديرها بدرجة صحيحة.

لاحظ أن هذه المشكلة ليس من الضروري إدراكها مع بداية الحل باستخدام أسلوب السمبلكس ولكن قد تظهر لنا هذه المشكلة في إحدى المراحل المتقدمة من الحل.

مثال (7):

$$\text{عظم (ر) } 20 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3$$

في ظل أن:

$$3 \text{ س}_1 - 3 \text{ س}_2 + 5 \text{ س}_3 \geq 50$$

$$1 \text{ س}_1 + 3 \text{ س}_2 \geq 10$$

$$1 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + 4 \text{ س}_3 \geq 20$$

$$1 \text{ س}_1, 2 \text{ س}_2, 3 \text{ س}_3 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس، ووضع ماذا تلاحظ؟

الحل

1- تحويل المتباينات إلى متساويات:

$$3 \text{ س}_1 + 3 \text{ س}_2 + 5 \text{ س}_3 + 1 \text{ ع}_1 = 50$$

$$1 \text{ س}_1 + 3 \text{ س}_2 + 2 \text{ ع}_2 = 10$$

$$1 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + 4 \text{ س}_3 + 3 \text{ ع}_3 = 20$$

2- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{(ر) } 20 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3$$

في ظل أن:

$$3 \text{ س}_1 + 3 \text{ س}_2 + 5 \text{ س}_3 + 1 \text{ ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = 50$$

$$1 \text{ س}_1 + \text{صفر س}_2 + 3 \text{ س}_3 + \text{صفر ع}_1 + 2 \text{ ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = 10$$

$$1 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + 4 \text{ س}_3 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + 3 \text{ ع}_3 = 20$$

3- اعداد جدول السمبلكس المبدئي:



### جدول السمبلكس المبدئي

م ر			20	10	1	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
صفر	ع1	50	3	-3	5	1	صفر	صفر
صفر	ع2	10	1	صفر	1	صفر	1	صفر
صفر	ع3	20	1	-1	4	صفر	صفر	1
ل ر			صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
م ر - ل ر			20	10	1	صفر	صفر	صفر

لاحظ أن (س1) يدخل الحل ويحل محل (ع2) الذي يترك الحل

∴ قيم (س1) الجديدة هي: [10 ، 1 ، صفر ، 1 ، صفر ، 1 ، صفر]

∴ قيم (ع1) الجديدة هي: [20 ، صفر ، -3 ، 2 ، 1 ، -3 ، صفر]

∴ قيم (ع3) الجديدة هي: [10 ، صفر ، -1 ، 3 ، 1 ، صفر ، -1]

اعداد جدول السمبلكس الثانى:

### جدول السمبلكس الثانى

م ر			20	10	1	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
صفر	ع1	20	صفر	-3	2	1	-3	صفر
20	س1	10	1	صفر	1	صفر	1	صفر
صفر	ع3	10	صفر	-1	3	صفر	-1	1
ل ر			200	20	20	صفر	20	صفر
م ر - ل ر			صفر	10	-19	صفر	-20	صفر

من الواضح أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل ويجب إدخال المتغير (س2) إلى الحل، وعند محاولة تحديد المتغير الذى يترك الحل نجد أنه ليست هناك قيم موجبة فى العمود (س2) وبالتالي لا يمكن إجراء عملية القسمة وبالتالي فالمشكلة بلا حدود. حيث يلاحظ أن قيمة المتغير

(س2) فى الصف الأخير (م ز - ل ز) قيمة موجبة (10)، وذلك أن دالة الهدف تصبح دالة غير محدودة.

### أسعار الظل:

يقود تفسير محتوى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الباحثين والدارسين إلى التعرف على اصطلاح "سعر الظل" أو ما يطلق عليه أيضاً السعر المحاسبى أو السعر الداخلى أو خسارة الفرصة البديلة لإنتاج المنتج ومعدلات الإحلال الحدية.

ويمكن تعريف سعر الظل لمورد نادر معين بأنه مقدار الزيادة (أو النقص) فى قيمة دالة الهدف الناتج عن زيادة أو نقص الكمية المتاحة من هذا المورد بمقدار وحدة واحدة فقط بحيث يترتب على ذلك زيادة الربح المتحقق بمقدار معين. ويطلق على هذه الزيادة فى الربح والحاصلة نتيجة الحصول على وحدة اضافية من ذلك المورد إصطلاح "سعر ظل المورد".

هذا كما يمكن القول بصفة عامة أنه يوجد لكل مورد من الموارد المتاحة سعر ظل واحد وذلك إذا ما تم زيادة هذا المورد أو تخفيضه بوحدة واحدة، إلا فى حالة مشكلة عدم الانتظام (السابق الإشارة إليها) فإنه يوجد للمورد الواحد سعران أحدهما فى حالة تخفيض المورد بوحدة واحدة، والآخر فى حالة زيادة المورد بوحدة واحدة أيضاً.

وتوجد طريقتان أساسيتان يمكن استخدامهما فى الحصول على أسعار الظل تتمثل فيما يلى:

- 1- الحصول على أسعار الظل مباشرة من الصف الأخير (م ز - ل ز) فى جدول السمبلكس النهائى (جدول الحل الأمثل) تحت الأعمدة التى تتضمن المتغيرات العاطلة (ع1 ، ع2 ، .....). من واقع الحل الأصلى للمشكلة.
- 2- الحصول على أسعار الظل من خلال تحويل المشكلة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية Primal Problem إلى نموذج يعطى أسعار الظل



مباشرة يطلق عليه اصطلاح المشكلة الثنائية أو المزدوجة Dual Problem. (وسوف يتم تناول تلك المشكلة في الفصل القادم).

ومن أجل فهم كيفية الحصول على أسعار الظل مباشرة من الصف الأخير (م ز - ل ز) في جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية دعنا نأخذ المثال التالي:

مثال (8):

$$\text{عظم (ز)} = 6\text{س}_1 + 4\text{س}_2$$

في ظل أن:

$$\text{الآلة الأولى: } 2\text{س}_1 + 2\text{س}_2 \geq 20 \text{ ساعة عمل}$$

$$\text{الآلة الثانية: } 2\text{س}_1 + 2\text{س}_2 \geq 16 \text{ ساعة عمل}$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

وقد كان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة هو:

جدول السمبلكس النهائي (الأمثل)

ربح الوحدة	م ز		6	4	صفر	صفر
	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ع <sub>2</sub>
6	س <sub>1</sub>	8	1	صفر	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	س <sub>2</sub>	4	صفر	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	ل ز	64	6	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$
	م ز - ل ز		صفر	صفر	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

من فحص الصف الأخير (م ز - ل ز) في جدول الحل الأمثل يتضح ما يلي:

1- المتغيرات الأساسية (س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub>) يكون معاملها (صفر) في الصف الأخير

(م ز - ل ز).

2- المزيج الإنتاجي الأمثل يتكون من إنتاج (8) وحدات من (س1) ، و (4) من (س2).

3- أسعار الظل هما الرقمان  $(\frac{8}{3})$  ،  $(\frac{2}{3})$  ، وهما الرقمان تحت عمودى المتغيرين العاطلين (ع1) ، (ع2).

وكل رقم من هذين الرقمين يقابل قيماً من قيود المشكلة، حيث يقابل الرقم  $(\frac{8}{3})$  القيد الأول، بينما يقابل الرقم الثانى  $(\frac{2}{3})$  القيد الثانى .

4- حيث أن (ع1) تخص القيد الأول والذي كانت طاقته الإنتاجية (20) فإذا تم زيادتها بمقدار ساعة واحدة فإن أثر ذلك يتضح من دراسة عمود (ع1) بجدول الحل الأمثل، حيث يتبين أن زيادة طاقة القيد الأول (الطرف الأيسر من القيد) بمقدار وحدة واحدة (ساعة واحدة) يترتب عليه ما يلى:

أ- زيادة الكمية المنتجة من (س1) بمقدار  $(\frac{2}{3})$  ، وتخفيض الكمية المنتجة من (س2) بمقدار  $(\frac{1}{3})$ .

ب- تأثير تلك التعديلات على الربح يكون كما يلى:

الزيادة فى الربح الناتجة عن إنتاج  $(\frac{2}{3})$  وحدة إضافية من (س1)

$$4 = \frac{2}{3} \times 6 =$$

النقص فى الربح الناتج عن نقص إنتاج (س2) بمقدار  $(\frac{1}{3})$  وحدة يساوى

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times 4$$

∴ الزيادة الصافية فى الربح الناتجة عن استخدام ساعة إضافية من المورد

$$\text{الأول} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

وتعادل تلك الزيادة الصافية سعر الظل للمورد الأول والتي تساوى  $(\frac{8}{3})$ .



5- حيث أن (ع2) تخص القيد الثانى والذي كانت طاقته الإنتاجية (16) فإذا تم زيادتها بمقدار ساعة واحدة، فإن أثر ذلك أن زيادة طاقة القيد الثانى (الطرف الأيسر من القيد) بمقدار وحدة واحدة (ساعة واحدة) يترتب عليه ما يلى:

أ- انخفاض الكمية المنتجة من (س1) بمقدار  $(\frac{1}{3})$  ، وزيادة الكمية المنتجة من (س2) بمقدار  $(\frac{2}{3})$  .

ب- تأثير تلك التعديلات على الربح يكون كما يلى:

الانخفاض فى الربح الناتج عن نقص إنتاج (س1) بمقدار  $(\frac{1}{3})$

$$2 = \frac{1}{3} \times 6 =$$

الزيادة فى الربح الناتجة عن إنتاج  $(\frac{2}{3})$  وحدة إضافية من (س2)

$$\frac{8}{3} = \frac{2}{3} \times 4 =$$

الزيادة الصافية فى الربح الناتجة عن استخدام ساعة إضافية من المورد الثانى

$$\frac{2}{3} = 2 - \frac{8}{3} =$$

وتعادل تلك الزيادة الصافية سعر الظل للمورد الثانى والتي تساوى  $(\frac{2}{3})$ .

ملاحظات هامة عند استخدام سعر الظل فى عملية اتخاذ القرارات:

1- عن طريق مقارنة أسعار الظل لكل من الموارد المتاحة يمكن تحديد أولويات الإنفاق. حيث يجب زيادة المتاح من المورد الذى يساهم بشكل أكبر فى زيادة الربح الصافى أى فى تحقيق الأرباح للمنظمة.

2- سعر الظل يمثل التكلفة الإقتصادية لمورد ما والتي يمكن التوضيح بها لإنتاج وحدة واحدة من المنتج.

3- إذا كان متغير العطل (ع) ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل فإن سعر الظل لهذا المتغير لابد وأن يكون يساوى صفراً. ويرجع

ذلك إلى أن وجود قيمة موجبة للمتغير (ع) تدل على وجود فائض من هذا المورد، وبالتالي ليس هناك داعى لشراء أى وحدة اضافية منه فى هذه المرحلة ويعنى ذلك أن قيمة الوحدة الإضافية للمنظمة تساوى صفر.

4- إذا كان متغير العطل (ع) ضمن المتغيرات الغير أساسية فى جدول الحل الأمثل فإن قيمته تساوى صفر وسعر الظل له يكون رقماً موجباً معبراً عنه برقماً سالباً مساوياً له فى الصف الأخير (م ز - ل ز). ويرجع ذلك إلى أنه قد تم استخدام هذا المورد تماماً (أى هو مورد نادر) وأصبح هو العامل الحاكم فى رقم الإنتاج وأى زيادة فيه يترتب عليها زيادة الإنتاج وتحقيق أرباح أعلى.

مثال (9):

فى المثال السابق (رقم 8) إذا عرض أحد الموردين على المنظمة تشغيل الآلة الأولى لمدة ساعة مقابل ثلاثة جنيهات، وتشغيل الآلة الثانية مقابل نصف جنيهه للساعة، فهل يجب أن تقبل المنظمة هذا العرض أم لا ولماذا؟

الحل

1- نحدد أولاً سعر الظل لكل من الآلة الأولى و الآلة الثانية:

سعر الظل للآلة الأولى =  $(\frac{8}{3})$  ، وسعر الظل للآلة الثانية =  $(\frac{2}{3})$ .

2- القرار: تقبل المنظمة عرض المورد بتشغيل الآلة الأولى مقابل ثلاثة جنيهات للساعة الواحدة وذلك لأن الزيادة الصافية فى الربح مقابل تشغيل الآلة الأولى ساعة واحدة =  $(2\frac{2}{3})$  أى أقل من عرض المورد.

أما بالنسبة للآلة الثانية فإن المنظمة ترفض عرض المورد بتشغيل الآلة الثانية ساعة واحدة مقابل نصف جنيهه حيث أن الزيادة الصافية فى الربح مقابل تشغيل الآلة الثانية ساعة واحدة =  $(\frac{2}{3})$  وهى أكبر من عرض المورد.



### تمارين علي الفصل الثالث

تمرين (1): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{عظم (ر) } = 8 \text{ س}_1 + 6 \text{ س}_2$$

في ظل أن:

$$4 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 \geq 60$$

$$2 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 \geq 48$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (2): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{عظم (ر) } = 3 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3$$

في ظل أن:

$$2 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3 \geq 2$$

$$5 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3 \geq 5$$

$$2 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3 \geq 6$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2, \text{س}_3 \leq \text{صفر}$$

تمرين (3): المطلوب حل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{تدنية (ت) } = 3 \text{ س}_1 + 8 \text{ س}_2$$

في ظل أن:

$$200 = \text{س}_1 + \text{س}_2$$

$$80 \geq \text{س}_1$$

$$60 \leq \text{س}_2$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (4): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{تدنية (ت) } = 80 \text{ س}_1 + 60 \text{ س}_2$$

في ظل أن:

$$2س + 3س2 \leq 50$$

$$4س + 2س2 \leq 120$$

$$س1 ، س2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (5): قيم حل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{تدنية (ت) } = 5س1 + 7س2$$

في ظل أن:

$$50 = 2س + 2س2$$

$$20 \leq س1$$

$$20 \geq س2$$

$$س1 ، س2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (6): قم بحل المشكلة التالية باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{عظم (ر) } = 10س1 + 9س2$$

في ظل أن:

$$5س1 + 4س2 \geq 120$$

$$2س1 + 4س2 \geq 60$$

$$س1 ، س2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (7): هل يمكنك حل هذه المشكلة المعبر عنها في شكل نموذج

للبرمجة الخطية باستخدام أسلوب السمبلكس؟

$$\text{تدنية (ت) } = 2س1 + 8س2$$

في ظل القيود:

$$5س1 + 10س2 = 150$$

$$20 \geq س1$$

$$14 \leq س2$$

$$س1 ، س2 \leq \text{صفر}$$



تمرين (8): إذا كانت المتباينات التالية تمثل متباينات قيود أحد نماذج البرمجة الخطية:

$$7 = 3س + 2س + 1س$$

$$10 \leq 3س + 2س - 1س$$

$$س, 2س, 3س \leq \text{صفر}$$

قم بتحديد الحل الأمثل للنموذج إذا كانت دالة الهدف له كما يلي:

$$(أ) \text{ عظم } (ر) = 2س + 3س + 5س$$

$$(ب) \text{ تدنية } (ت) = 2س + 3س + 5س$$

تمرين (9): أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باستخدام أسلوب السمبلكس:

$$\text{تدنية } (ت) = 3س + 5س$$

في ظل أن:

$$200 \leq 10س + 20س$$

$$20 \geq 1س$$

$$16 = 2س + 1س$$

$$س, 2س \leq \text{صفر}$$

تمرين (10): يمثل النموذج التالي نموذجاً للبرمجة الخطية:

$$\text{عظم } (ر) = 3س + 2س + 3س$$

في ظل أن:

$$2 \geq 3س + 2س + 1س$$

$$8 \leq 3س + 4س + 2س$$

$$س, 2س, 3س \leq \text{صفر}$$

المطلوب: هل يوجد لهذا النموذج حلاً ممكناً باستخدام أسلوب السمبلكس؟ ولماذا؟

تمرين ( 11 ) : فيما يلي جدول السمبلكس لشركة " بالهناء " للمواد الغذائية :

	2	1	صفر	صفر	م -
المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ف <sub>1</sub>
ع <sub>1</sub>	2	2			1 -
س <sub>2</sub>	2	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$ -

المطلوب:

1- هل تعتقد أن الجدول السابق هو لمشكلة تعظيم ربح أم تدنية تكاليف ؟ ولماذا ؟

2- ما هو ترتيب هذا الجدول ؟ حدد مبررات إجابتك ؟

3- استكمال الجدول السابق.

4- هل تعتقد أن الجدول السابق بعد استكمالها هو جدول الحل الأمثل ؟

أ- إذا كانت إجابتك ب (نعم) فما هو الحل الأمثل؟

ب- إذا كانت إجابتك ب (لا) قم باستكمال الحل حتي تصل إلي الحل الأمثل.

تمرين ( 12 ) : فيما يلي جدول السمبلكس لشركة " ريماس " للمواد الغذائية:

	3	8	م	صفر	م	صفر
المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	و <sub>1</sub>	ع <sub>1</sub>	ف <sub>1</sub>
و <sub>1</sub>	140	1				1 -
ع <sub>1</sub>	80	1				صفر
س <sub>2</sub>	60	صفر				1 -



### المطلوب:

- 1- هل تعتقد أن الجدول السابق هو لمشكلة تعظيم ربح أم تدنية تكاليف ؟  
ولماذا ؟
- 2- ما هو ترتيب هذا الجدول ؟ حدد مبررات إجابتك ؟
- 3- كم عدد قيود المشكلة الأصلية؟
- 4- استكمال الجدول السابق.
- 5- اعداد جدول الحل التالي لهذا الجدول "موضحاً خطوات الحل بالتفصيل.

## الفصل الرابع

### الصياغة الثنائية لنموذج البرمجة الخطية

- مقدمة.
- فوائد استخدام النموذج الثنائي أو المقابل في حل مشاكل البرمجة الخطية.
- القواعد التي يمكن إتباعها عند تحويل الصيغة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة الثنائية.
- أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس أو أسلوب مقابل السمبلكس.
- تمارين للتدريب.



## الصياغة الثنائية لنموذج البرمجة الخطية

### مقدمة:

تنقسم مشكلات البرمجة الخطية إلى جزأين متقابلين، حيث يمكن القول أن مشكلة تعظيم الربح يقابلها مشكلة تدنية التكاليف وأن مشكلة تدنية التكاليف يقابلها أيضاً مشكلة تعظيم الربح.

ويطلق على هذه المشكلة في هذه الحالة المشكلة الثنائية أو المشكلة المقابلة أو المشكلة الإزدواجية، ويعنى ذلك أن لفظ الثنائية يعنى أن أى مشكلة برمجة خطية يمكن صياغتها رياضياً بطريقتين وهما: الطريقة المعتادة التى ذكرناها فى الأجزاء السابقة ويطلق عليها الصياغة الأولية أو الأصلية، والطريقة الثانية تمثل الوجه الآخر للصياغة الأولية ويطلق عليها مشكلة الصياغة الثنائية.

ويعنى ذلك أيضاً أن يوجد نموذج مقابل Dual Model لكل نموذج أولى Primal Model من نماذج البرمجة الخطية، وأن الحل الأمثل للنموذج المقابل ينطبق تماماً مع الحل الأمثل للنموذج الأولى.

فوائد استخدام النموذج الثنائى أو المقابل فى حل مشاكل البرمجة الخطية:

توجد العديد من الفوائد التى تدعوا إلى استخدام النموذج الثنائى أو المقابل فى حل مشاكل البرمجة الخطية ومنها:

- 1- سرعة وسهولة الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلات البرمجة الخطية، حيث تستلزم مشكلة الثنائية عند حلها خطوات رياضية أقل تعقيداً من الخطوات اللازمة لحل المشكلة فى صيغتها الأولية أو الأصلية.
- 2- استخدام النموذج الثنائى يساعد المديرين على تقييم بدائل حل المشكلات وتحديد قيمة كل بديل.
- 3- يعتبر النموذج الثنائى هام جداً فى التحليل المتقدم لمدى حساسية الحل الأمثل لأى تغييرات فى البيانات التى تبنى على أساسها نموذج البرمجة الخطية.

4- يمثل النموذج الثنائي بداية لدراسة وتحليل أسعار الظل التي توفر للمديرين معلومات خاصة عن الموارد المتاحة.

5- يقدم النموذج الثنائي بيانات ذات أهمية عند عمل التحليل الاقتصادي لمشكلة البرمجة الخطية.

وتحتوى الصياغة الثنائية لنموذج البرمجة الخطية على نفس المكونات الأساسية التي يحتوئها الشكل أو الصياغة الأصلية للمشكلة، فهي تحتوى على دالة الهدف وعلى مجموعة من القيود.

القواعد التي يمكن إتباعها عند تحويل الصيغة الأصلية لنموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة الثنائية:

عند تحويل النموذج الأصلي للبرمجة الخطية إلى نموذج مقابل أو ثنائي فإنه يجب إتباع مجموعة من القواعد التالية:

1- إذا كانت دالة الهدف فى النموذج الأصلي هى دالة تعظيم الربح. فإنه يتم تحويلها فى النموذج الثنائى لتصبح دالة تدنيه التكاليف. وإذا كانت دالة الهدف فى النموذج الأصلي هى دالة تدنية التكاليف فإنه يتم تحويلها فى النموذج الثنائى لتصبح دالة تعظيم الربح أى تعظيم كفاءة استخدام الموارد المتاحة.

2- تمثل معاملات دالة الهدف فى المشكلة الأصلية الجانب الأيسر للقيود فى المشكلة الثنائية.

3- القيم الموجودة بالجانب الأيسر من معاملات القيود فى المشكلة الأصلية تصبح هى المعاملات الخاصة بدالة الهدف فى المشكلة الثنائية.

4- تمثل معاملات المتغير الأول فى قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الأول فى المشكلة الثنائية، كما تمثل معاملات المتغير الثانى فى قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الثانى فى المشكلة الثنائية ... وهكذا. .



5- عدد المتغيرات في الصياغة الثنائية يساوى عدد معادلات القيود الموجودة في الصياغة الأصلية.

6- تتغير إشارة المتباينة ( $\geq$ ) في المشكلة الأصلية إلى إشارة المتباينة ( $\leq$ ) في المشكلة الثنائية، أى أن إشارات المتباينات في الصيغة الأصلية تصبح في الصيغة الثنائية ( $\leq$ ) في حالة التدنية، ( $\geq$ ) في حالة التعظيم.

7- يتم إضافة شرط عدم السالبية إلى المتغيرات الجديدة.  
ونتناول الآن بعض الأمثلة لتطبيق القواعد السابقة:

مثال (1):

إذا توفر لديك النموذج الرياضى التالى لأحد مشاكل البرمجة الخطية.

$$\text{عظم ( ر ) } = 40 \text{ س}_1 + 50 \text{ س}_2$$

فى ظل:

$$3 \text{ س}_1 + 3 \text{ س}_2 \geq 90$$

$$3 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 \geq 80$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائى (المقابل) للنموذج الأصلى السابق.

الحل

إن النموذج السابق يعبر عن الصياغة الأصلية للمشكلة دعنا الآن باستخدام

القواعد السابقة نحول هذه الصياغة الأصلية إلى الصياغة الثنائية كما يلى:

1- وفقاً للقاعدة رقم (1) فإن دالة الهدف فى الصياغة الثنائية هى دالة تدنية

التكاليف نظراً لأن دالة الهدف فى الصياغة الأصلية هى دالة تعظيم الربح.

2- وفقاً للقاعدة رقم (2) تمثل معاملات دالة الهدف فى المشكلة الأصلية

وهى (40 ، 50) الجانب الأيسر للقيود فى المشكلة الثنائية.

3- وفقاً للقاعدة رقم (3) فإن القيم الموجودة بالجانب الأيسر من معادلات القيود في المشكلة الأصلية وهي (90، 80) تصبح هي معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية.

4- وفقاً للقاعدة رقم (4) تمثل معاملات المتغير الأول (س<sub>1</sub>) وهي (3 ، 3) في قيود المشكلة الأصلية معاملات القيد الأول (3 ص<sub>1</sub> + 3 ص<sub>2</sub>) في المشكلة الثنائية ..... وهكذا.

5- وفقاً للقاعدة رقم (5) فإن عدد معادلات القيود في المشكلة الأصلية يساوي (2) هو نفسه عدد المتغيرات (ص<sub>1</sub> ، ص<sub>2</sub>) في المشكلة الثنائية.

6- وفقاً للقاعدة رقم (6) فإن إشارة المتباينات في المشكلة الأصلية ( $\geq$ ) تتحول إلى ( $\leq$ ) في المشكلة الثنائية.

ومن خلال ما تقدم يمكن اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق كما يلي:

$$\text{تدنية (ت) } = 90 \text{ ص}_1 + 80 \text{ ص}_2$$

في ظل:

$$3 \text{ ص}_1 + 3 \text{ ص}_2 \leq 40$$

$$3 \text{ ص}_1 + 4 \text{ ص}_2 \leq 50$$

$$\text{ص}_1 ، \text{ص}_2 \leq \text{صفر}$$

مثال (2):

إذا توفر لديك النموذج الرياضي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم (ر) } = 5 \text{ س}_1 + 12 \text{ س}_2 + 4 \text{ س}_3$$

في ظل:

$$10 \geq 3 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2$$

$$8 = 3 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + 3 \text{ س}_3$$



س 1 ، س 2 ، س 3 ≤ صفر

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

الحل

تدنية (ت) = 10 ص 1 + 8 ص 2

في ظل:

$$ص 1 + 2 ص 2 \leq 5$$

$$2 ص 1 - 2 ص 2 \leq 12$$

$$ص 1 + 3 ص 2 \leq 4$$

$$ص 1 ، ص 2 \leq \text{صفر}$$

مثال (3):

إذا توفر لديك النموذج الرياضي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

تدنية (ت) = 10 ص 1 - 6 ص 2

في ظل:

$$-2 ص 1 + 2 ص 2 \leq -6$$

$$2 ص 1 + 3 ص 2 \geq 5$$

$$ص 1 ، ص 2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق

الحل

أولاً يجب ضرب القيد الأول في (-1) لتحويل القيمة السالبة في الجانب

الأيسر إلى قيمة موجبة مع تغيير إشارة المتباينة من ( $\leq$ ) إلى ( $\geq$ )

$-2 ص 1 + 2 ص 2 \leq -6$  بالضرب في (-1) مع تغيير إشارة المتباينة

يصبح القيد الجديد كما يلي:

$$2 \text{ س } 1 - 2 \text{ س } 2 \geq 6$$

ويكون النموذج الثنائي كما يلي:

$$\text{عظم (ر) } = 6 \text{ س } 1 + 5 \text{ س } 2$$

في ظل:

$$2 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 \geq 10$$

$$-2 \text{ س } 1 + 3 \text{ س } 2 \geq -6$$

$$\text{س } 1, \text{ س } 2 \leq \text{صفر}$$

مثال (4):

قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرجة الخطية التالية:

$$\text{عظم (ر) } = -5 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2$$

في ظل:

$$- \text{س } 1 + \text{س } 2 \geq -3$$

$$2 \text{ س } 1 + 3 \text{ س } 2 \geq 5$$

$$\text{س } 1, \text{ س } 2 \leq \text{صفر}$$

**الحل**

\* يجب ضرب القيد الأول في (-1) لتحويل القيمة السالبة في الجانب الأيسر

من القيد إلى قيمة موجبة مع تغيير إشارة المتباينة من ( $\geq$ ) إلى ( $\leq$ )

$- \text{س } 1 + \text{س } 2 \geq -3$  بالضرب في (-1) مع تغيير إشارة المتباينة يصبح القيد

الجديد:

$$\text{س } 1 - \text{س } 2 \leq 3$$

وتكون الصيغة الثنائية كما يلي:

$$\text{تدنية (ت) } = 3 \text{ س } 1 + 5 \text{ س } 2$$

في ظل:



$$\text{ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 \leq 5$$

$$- \text{ص}_1 + 3 \text{ ص}_2 \leq 2$$

$$\text{ص}_1, \text{ ص}_2 \leq \text{صفر}$$

مثال (5):

إذا توفر لديك النموذج الأصلي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم (ر)} = 11 \text{ ص}_1 + 6 \text{ ص}_2 + 2 \text{ ص}_3$$

في ظل:

$$5 \text{ ص}_1 + 3 \text{ ص}_2 + 7 \text{ ص}_3 \geq 2100$$

$$4 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 5 \text{ ص}_3 \geq 1600$$

$$3 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 4 \text{ ص}_3 \geq 1700$$

$$\text{ص}_1, \text{ ص}_2, \text{ ص}_3 \leq \text{صفر}$$

المطلوب:

- 1- اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.
- 2- قارن بين نتائج حل كل من النموذج الأصلي والنموذج الثنائي وذلك باستخدام أسلوب السمبلكس.
- 3- تحديد أسعار الظل باستخدام كل من النموذج الأصلي والنموذج الثنائي للمشكلة السابقة.

الحل

1- اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق:

$$\text{دالة الهدف تدنية (ت)} = 2100 \text{ ص}_1 + 1600 \text{ ص}_2 + 1700 \text{ ص}_3$$

في ظل:

$$5 \text{ ص}_1 + 4 \text{ ص}_2 + 3 \text{ ص}_3 \leq 11$$

$$3 \text{ ص } 1 + 2 \text{ ص } 2 + 2 \text{ ص } 3 \leq 6$$

$$7 \text{ ص } 1 + 5 \text{ ص } 2 + 4 \text{ ص } 3 \leq 2$$

$$\text{ص } 1, \text{ ص } 2, \text{ ص } 3 \leq \text{صفر}$$

2- حل النموذج الأصلي باستخدام أسلوب السمبلكس:

أ- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) عن طريق إضافة المتغيرات العاطلة (ع):

$$5 \text{ ص } 1 + 3 \text{ ص } 2 + 7 \text{ ص } 3 + \text{ع } 1 = 2100$$

$$4 \text{ ص } 1 + 2 \text{ ص } 2 + 5 \text{ ص } 3 + \text{ع } 2 = 1600$$

$$3 \text{ ص } 1 + 2 \text{ ص } 2 + 4 \text{ ص } 3 + \text{ع } 3 = 1700$$

ب- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{دالة الهدف عظم (ر)} = 11 \text{ ص } 1 + 6 \text{ ص } 2 + 2 \text{ ص } 3 + \text{صفر ع } 1 + \text{صفر ع } 2 + \text{صفر ع } 3$$

في ظل:

$$5 \text{ ص } 1 + 3 \text{ ص } 2 + 7 \text{ ص } 3 + \text{ع } 1 + \text{صفر ع } 2 + \text{صفر ع } 3 = 2100$$

$$4 \text{ ص } 1 + 2 \text{ ص } 2 + 5 \text{ ص } 3 + \text{ع } 1 + \text{صفر ع } 2 + \text{صفر ع } 3 = 1600$$

$$3 \text{ ص } 1 + 2 \text{ ص } 2 + 4 \text{ ص } 3 + \text{ع } 1 + \text{صفر ع } 2 + \text{صفر ع } 3 = 1700$$

ج- إعداد جدول السمبلكس المبدئي للنموذج الأصلي:



### جدول السمبلكس المبدئي للنموذج الأصلي

م			2	6	11	م		
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
صفر	ع1	2100	5	3	7	1	صفر	صفر
صفر	ع2	1600	4	2	5	صفر	1	صفر
صفر	ع3	1700	3	2	4	صفر	صفر	1
ل ز			صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
م ز - ل ز			11	6	2	صفر	صفر	صفر

د- وبعد استكمال الحل نصل إلى الحل الأمثل الحالي عند جدول السمبلكس الثالث:

### جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي

م			2	6	11	م		
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
6	س2	200	صفر	1	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	صفر
11	س1	300	1	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{3}{2}$	صفر
صفر	ع3	400	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{1}{2}$	1
ل ز			11	6	$\frac{29}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	صفر
م ز - ل ز			صفر	صفر	$-\frac{25}{2}$	1-	$-\frac{3}{2}$	صفر

يتضح من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي ما يلي:

• يتمثل الحل الأمثل في:

$$س1 = 300 \text{ وحدة ، } س2 = 200 \text{ وحدة}$$

$$س3 = \text{صفر ، } ع1 = \text{صفر}$$

$$ع2 = \text{صفر ، } ع3 = 400 \text{ وحدة}$$

قيمة ربح الحل = 4500 جنية

- سعر ظل المورد الأول = (1) جنية
- سعر ظل المورد الثانى =  $(\frac{3}{2})$  جنية
- سعر ظل المورد الثالث = صفر ، حيث يتبين من الحل الأمثل أنه لم يتم إنتاج أى وحدات من المنتج (س3).

وتفسير ذلك يتم من خلال استخدام أسعار ظل الموارد المختلفة حيث أنه إذا تم تقييم الموارد اللازمة لتصنيع الوحدة من المنتج (س3) بأسعار الظل، ومقارنة النتيجة مع عائد مساهمة الوحدة من المنتج (س3)، يتضح أن قيمة المورد اللازمة مقومة بأسعار الظل أكبر من عائد مساهمة الوحدة من المنتج (س3) كما يتضح فيما يلى:

- (7 وحدات من المورد الأول  $\times$  (1) سعر ظل المورد الأول) = 7 جنية
- (5 وحدة من المورد الثانى  $\times$   $(\frac{3}{2})$  سعر ظل المورد الثانى) = 7.5 جنية
- (4 وحدات من المورد الثالث  $\times$  (صفر) سعر ظل المورد الثالث = صفر جنية
- ∴ قيمة الموارد اللازمة من الموارد الثلاثة مقومة بأسعار الظل لتصنيع وحدة واحدة من (س3) = 14.5 جنية. فى حين أن عائد مساهمة الوحدة من المنتج (س3) = (2) جنية.

∴ الفرق بين الموارد مقومة بسعر الظل وعائد مساهمة الوحدة من المنتج (س3) = 12.5 جنية (تمثل خسارة الفرصة البديلة).

3- حل النموذج الثنائى باستخدام أسلوب السمبلكس:

أ- تحويل المتباينات إلى معادلات (متساويات) بإضافة متغيرات وهمية وطرح متغيرات فائضة:

$$5 \text{ ص} + 4 \text{ ص} + 3 \text{ ص} - \text{ف} + \text{و} = 11$$

$$3 \text{ ص} + 2 \text{ ص} + 2 \text{ ص} - \text{ف} + \text{و} = 6$$

$$7 \text{ ص} + 5 \text{ ص} + 4 \text{ ص} - \text{ف} + \text{و} = 2$$



ب- إيجاد كل المتغيرات في كل المعادلات ودالة الهدف:

$$\text{دالة الهدف: (ت) } = 2100 \text{ ص}_1 + 1600 \text{ ص}_2 + 1700 \text{ ص}_3 + \text{صفر ف}_1$$

$$+ \text{صفر ف}_2 + \text{صفر ف}_3 + \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3$$

في ظل :

$$5 \text{ ص}_1 + 4 \text{ ص}_2 + 3 \text{ ص}_3 - \text{ف}_1 + \text{صفر ف}_2 + \text{صفر ف}_3 + \text{م}_1$$

$$+ \text{صفر م}_2 + \text{صفر م}_3 = 11$$

$$3 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 + 2 \text{ ص}_3 + \text{صفر ف}_1 - \text{ف}_2 + \text{صفر ف}_3 + \text{صفر م}_1$$

$$+ \text{م}_2 + \text{صفر م}_3 = 6$$

$$7 \text{ ص}_1 + 5 \text{ ص}_2 + 4 \text{ ص}_3 + \text{صفر ف}_1 + \text{صفر ف}_2 - \text{ف}_3 + \text{صفر م}_1$$

$$+ \text{صفر م}_2 + \text{م}_3 = 2$$

ج- اعداد جدول السمبلكس المبدئي للنموذج الثنائي:

جدول السمبلكس المبدئي للنموذج الثنائي

م	م	م	صفر	صفر	صفر	1700	1600	2100	م		
									قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	تكلفة الوحدة
3	2	1	ف <sub>3</sub>	ف <sub>2</sub>	ف <sub>1</sub>	ص <sub>3</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>1</sub>	11	1	م
صفر	صفر	1	صفر	صفر	1-	3	4	5	6	2	م
صفر	1	صفر	صفر	1-	صفر	2	2	3	2	3	م
1	صفر	صفر	1-	صفر	صفر	4	5	7	19	ل	م
م	م	م	م-	م-	م-	9	11	15	19	ل	م
صفر	صفر	صفر	م	م	م	-1700	-1600	2100	م - ل		
						9	11	15 -			

د- وبعد استكمال الحل بطريقة السمبلكس المعتادة نصل إلى الحل المثل

لنموذج الثنائي كما يلي:

## جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي

م	م	م	صفر	صفر	صفر	1700	1600	2100	م		
									قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	تكلفة الوحدة
3ج	2ج	1ج	ف3	ف2	ف1	ص3	ص2	ص1	$\frac{3}{2}$	ص2	1600
صفر	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	صفر	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	صفر	$\frac{25}{2}$	ف1	صفر
1-	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر	1	ص1	2100
صفر	$\frac{3}{2}$	1-	صفر	2-	1	1	صفر	1	4500	ل ر	
صفر	850-	300	صفر	200-	300-	1300	1600	2100	م ر - ل ر		
م	850+م	300-م	صفر	200	300	400	صفر	صفر			

المقارنة بين نتائج حل كل من النموذج الأصلي والنموذج الثنائي باستخدام طريقة السمبلكس المعتادة:

1- إن قيم المتغيرات (ص1، ص2، ص3) في جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الثنائي (1،  $\frac{3}{2}$ ، صفر) هي القيم المطلقة لمعاملات المتغيرات (1ع، 2ع، 3ع) في الصف الأخير (م ر - ل ر) في جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلي. وهذه القيم هي أسعار الظل للمتغيرات الأصلية (س1، س2، س3)، وعلى ذلك فإن حل النموذج الثنائي يؤدي إلى الوصول أسعار الظل للمتغيرات الأصلية.

2- إن قيم المتغيرات (س1، س2، س3) في جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلي (300، 200، صفر) هي بالضبط القيم التي توصلنا إليها في الصف الأخير (م ر - ل ر) في جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الثنائي لمعاملات المتغيرات (ف1، ف2، ف3).

3- حل المشكلة الأصلية (النموذج الأصلي) موجود في الصف الأخير (م ر - ل ر) (صف اختبار المثالية) للمشكلة الثنائية (النموذج الثنائي) تحت المتغيرات غير الوهمية كما يوضح ذلك الجدول التالي:



النموذج الثنائي		النموذج الأصلي	
قيم المتغير	صف اختيار المثالية	قيم متغيرات الحل	المتغيرات الاساسية
300	ف <sub>1</sub>	←	س <sub>1</sub>
200	ف <sub>2</sub>	←	س <sub>2</sub>
400	ص <sub>3</sub>	←	ع <sub>3</sub>

4- نفس الشيء حل المشكلة الثنائية (النموذج الثنائي) موجود في الصف الأخير (م ر - ل ر) (صف اختبار المثالية) تحت المتغيرات غير الأساسية، كما يوضح الجدول التالي:

النموذج الأصلي		النموذج الثنائي	
قيم المتغير	صف اختيار المثالية	قيم متغيرات الحل	المتغيرات الاساسية
1	ع <sub>1</sub>	←	ص <sub>1</sub>
$\frac{3}{2}$	ع <sub>2</sub>	←	ص <sub>2</sub>
$\frac{25}{2}$	س <sub>3</sub>	←	ف <sub>3</sub>

مثال (6):

إذا توفر لديك النموذج الأصلي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم ( ر )} = 20 \text{ س}_1 + 10 \text{ س}_2$$

في ظل:

$$5 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 \geq 24$$

$$2 \text{ س}_1 + 5 \text{ س}_2 \geq 13$$

$$\text{س}_1, \text{ س}_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب:

1- اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

2- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج الأصلي السابق.

3- تحديد قيم متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائي وتحديد قيمة الحل الأمثل للنموذج الثنائي (وذلك باستخدام الحل الأمثل للنموذج الأصلي وبدون حل النموذج الثنائي).

### الحل

1- اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق:

النموذج الثنائي هو:

$$\text{دالة الهدف (ت) = } 24 \text{ ص}_1 + 13 \text{ ص}_2$$

في ظل:

$$5 \text{ ص}_1 + 2 \text{ ص}_2 \leq 20$$

$$4 \text{ ص}_1 + 5 \text{ ص}_2 \leq 10$$

$$\text{ص}_1, \text{ ص}_2 \leq \text{صفر}$$

2- التوصل إلى الحل الأمثل للنموذج الأصلي: بإتباع الخطوات المعروفة لأسلوب السمبلكس المعتاد، ويتمثل جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلي فيما يلي:

جدول السمبلكس الأمثل للنموذج الأصلي

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م ز			
			س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ع <sub>2</sub>
20	س <sub>1</sub>	$\frac{24}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	صفر
صفر	ع <sub>2</sub>	$\frac{17}{5}$	صفر	$\frac{17}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
	ل ز	96	20	16	4	صفر
	م ز - ل ز		صفر	-6	-4	صفر

• لاحظ أن المتغيرات المستخدمة في النموذج الأصلي هي:

(س<sub>1</sub> ، ع<sub>2</sub>) ← متغيرات أساسية ،



(س2 ، ع1) ← متغيرات غير أساسية .

وتتمثل المتغيرات المقابلة لتلك المتغيرات في النموذج الثنائي كما يلي:

متغيرات النموذج الأصلي	متغيرات النموذج الثنائي
متغيرات أساسية	متغيرات غير أساسية
س1	ف1
ع2	ص2
متغيرات غير أساسية	متغيرات أساسية
س2	ف2
ع1	ص1

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي
المتغيرات الأساسية	قيم المتغير
قيم متغيرات	صف اختبار
الحل	المثالية
س1	ف1
ع2	ص2

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي
صف اختبار	المتغيرات الأساسية
قيم المتغير	قيم متغيرات
المثالية	الحل
س2	ف2
ع1	ص1

وعلى ذلك نجد أن قيم متغيرات الحل الأمثل في النموذج الثنائي كما يلي:

$$ص1 = 4 ، ص2 = صفر ، ف1 = صفر ، ف2 = 6$$

\* قيمة الحل الأمثل للنموذج الثنائي: بالتعويض عن قيمة كل من ص1 ، ص2 في دالة الهدف:

$$96 = 24 \times 4 + 13 \times \text{صفر}$$

لاحظ أن: قيمة ربح الحل (96) جنيه في ظل الحل الأمثل في النموذج الأصلي (-) قيمة تكلفة الحل (96) جنيه في ظل الحل المتل للنموذج الثنائي.

**أسلوب الوجه الآخر للسيمبلكس أو أسلوب مقابل السيمبلكس: Dual Simplex**  
بذل "تشارلز ليكي" الكثير من الجهود سعياً وراء التوصل إلى طرق جديدة لحل مشكلات البرمجة الخطية بحيث يتمكن الباحثون عن طريق استخدامها من توفير كل من الوقت والجهد المبذولين في حل هذه المشكلات.

هذا وقد أسفرت جهود "تشارلز ليكي" عن التوصل إلى أسلوب الوجه الآخر للسيمبلكس والتي بمقتضاها يتم البدء في حل المشكلة عن طريق استخدام متغيرات ذات قيمة سالبة. حيث اتضح عند استخدام أسلوب السيمبلكس المعتاد في حالة وجود قيود بها  $\leq$  أو  $=$  فإنه يجب علينا أن نستخدم أسلوب المتغيرات الوهمية و1 ، و2 والقيمة الكبرى (م) في عملية الصياغة والحل. ومن هنا فإن أسلوب الوجه الآخر للسيمبلكس هو أسلوب أكثر سهولة لا يستلزم إضافة متغيرات وهمية. وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب يبدو مغايراً لأسلوب السيمبلكس المعتاد حيث أنه يبدأ بحلاً مبدئياً فيه قيم المتغيرات ممن الممكن أن تأخذ قيمة سالبة، إلا أنه يضمن أن يكون ذلك عملية مرحلية تبدأ من حلاً غير ممكناً إلى حلاً ممكناً وأمثال.

يمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب الوجه الآخر للسيمبلكس في حل مشكلات البرمجة الخطية من خلال حل المثال التالي:



مثال (7):

إذا توفر لديك النموذج الرياضي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{تدنيه (ت) } = 16 \text{ س}_1 + 20 \text{ س}_2$$

في ظل:

$$6 \text{ س}_1 + 6 \text{ س}_2 \leq 60$$

$$8 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 \leq 48$$

$$2 \text{ س}_1 + 4 \text{ س}_2 \leq 24$$

$$\text{س}_1, \text{س}_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: استخدام أسلوب الوجه الآخر للسيمبلكس في حل النموذج السابق.

الحل

1- ضرب دالة الهدف والقيود في إشارة سالبة، وعلى ذلك تبدو المشكلة

على الصورة التالية:

$$\text{عظم (ر) } = -16 \text{ س}_1 - 20 \text{ س}_2$$

في ظل:

$$-6 \text{ س}_1 - 6 \text{ س}_2 \geq -60$$

$$-8 \text{ س}_1 - 4 \text{ س}_2 \geq -48$$

$$-2 \text{ س}_1 - 4 \text{ س}_2 \geq -24$$

2- توجيه المشكلة نحو الحل المبدئي بإضافة المتغيرات العاطلة:

$$\text{عظم (ر) } = -16 \text{ س}_1 - 20 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3$$

في ظل:

$$-6 \text{ س}_1 - 6 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = -60$$

$$-8 \text{ س}_1 - 4 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = -48$$

$$-2 \text{ س}_1 - 4 \text{ س}_2 + \text{صفر ع}_1 + \text{صفر ع}_2 + \text{صفر ع}_3 = -24$$

3- اعداد جدول السيمبلكس المبدئي:

### جدول السمبلكس المبدئي

م ز		16-	20-	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ع2
صفر	ع1	60-	6-	6-	1	صفر
صفر	ع2	48 -	8-	4-	صفر	1
صفر	ع3	24-	2-	4-	صفر	صفر
	ل ز	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	م ز - ل ز	16	20	صفر	صفر	صفر

لاحظ أنه في الجدول السابق قد تم حساب قيمة الصف الأخير (م ز - ل ز) عن طريق طرح قيمة دالة الهدف من قيمة الصف (ل ز) وهذا عكس ما اعتدنا عليه عند استخدام طريقة السمبلكس المعتادة.

هذا كما أن الجدول السابق لا يمثل جدول الحل الأمثل نظراً لوجود قيم موجبة في الصف الأخير (م ز - ل ز)، وكذلك هو حل غير ممكن لوجود قيم سالبة في عمود قيم متغيرات الحل، وفي ضوء ذلك فإن الأمر يتطلب تحسين الحل السابق، ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

4- التحسين الأول للحل: ويتم ذلك بإتباع الخطوات الفرعية التالية:

- أ- تحديد المتغير الذي يترك الحل: ويتم ذلك باختيار المتغير صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالبة في عمود قيم متغيرات الحل، وهو هنا المتغير (ع1).
- ب- تحديد المتغير الذي يدخل الحل: ويتم ذلك عن طريق قسمة أرقام الصف الأخير (م ز - ل ز) الموجودة في أعمدة المتغيرات غير الأساسية على القيم المناظرة في صف (ع1) الذي يترك الحل كما يلي:



(1)	(2)	(3)	(4)
المتغيرات غير الأساسية	(م ز - ل ز)	القيم المناظرة في صف ع1	(3) ÷ (2)
س1	16	6-	$\frac{16}{6} -$
س2	20	6-	$\frac{20}{6} -$

ويتم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة (أقل قيمة مطلقة) وهو هنا المتغير (س1).

ج- تحديد قيم الصف (س1) الجديدة:

قسمة جميع أرقام الصف (ع1) ÷ رقم البؤرة

$$60- \div 6- = 10 ، 6- \div 6- = 1 ، 6- \div 6- = 1 ،$$

$$1 \div 6- = \left(-\frac{1}{6}\right) ، صفر \div 6- = صفر ، صفر \div 6- = صفر$$

وبالتالى فإن أرقام صف (س1) فى جدول السمبلكس الثانى هي: (10 ، 1 ،  $-\frac{1}{6}$  ، صفر ، صفر)

د- تحديد قيم صف (ع2) فى جدول السمبلكس الثانى:

$$هي: (32 ، صفر ، 4 ،  $-\frac{4}{3}$  ، 1 ، صفر)$$

هـ- قيم صف (ع3) فى جدول السمبلكس الثانى:

$$هي: (4- ، صفر ، 2- ،  $-\frac{1}{3}$  ، صفر ، 1)$$

و- اعداد جدول السمبلكس الثانى:

### جدول السمبلكس الثانى

م ر		16-	20-	صفر	صفر	صفر
ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ع2
16-	س1	10	1	1	$-\frac{1}{6}$	صفر
صفر	ع2	32	صفر	4	$-\frac{4}{3}$	1
صفر	ع3	4-	صفر	2-	$-\frac{1}{3}$	صفر
	ل ر	160-	16-	16-	$\frac{8}{3}$	صفر
	م ر - ل ر		صفر	4	$\frac{8}{3}$	صفر

يلاحظ أن جدول السمبلكس الثانى ليس هو جدول الحل الأمثل كما أنه جدول حل غير ممكن

#### 5- التحسين الثانى للحل: نتبع نفس الخطوات السابقة

- المتغير الذى يخرج من الحل هو (ع3)
- المتغير الذى يدخل الحل هو (س2)
- قيم الصف (س2) فى جدول السمبلكس الثالث هى:  
(2 ، صفر ، 1 ،  $\frac{1}{6}$  ، صفر ،  $-\frac{1}{2}$ )
- قيم الصف (س1) فى جدول السمبلكس الثالث هى:  
(8 ، 1 ، صفر ،  $-\frac{1}{6}$  ، صفر ،  $\frac{1}{2}$ )
- قيم الصف (ع2) فى جدول السمبلكس الثالث هى:  
(24 ، صفر ، صفر ،  $-\frac{1}{2}$  ، 1 ، 2)
- اعداد جدول السمبلكس الثالث:



### جدول السمبلكس الثالث:

ريج الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م ز			
			16-	20-	صفر	صفر
16-	س1	8	1	صفر	$-\frac{1}{6}$	صفر
صفر	ع2	24	صفر	صفر	2-	1
20-	س2	2	صفر	1	$-\frac{1}{6}$	صفر
	ل ز	168-	16-	20-	$-\frac{2}{3}$	صفر
	م ز - ل ز		صفر	صفر	$-\frac{2}{3}$	صفر

وحيث أن كل قيم متغيرات الحل في جدول السمبلكس الثالث هي قيم موجبة فإن ذلك يعد حلاً ممكناً وفقاً لأسلوب مقابل السمبلكس ويتمثل الحل في: إنتاج 8 وحدات من (س1) ، ووحدين من (س2) وريج الحل هو (168) جنيه.

• الفرق بين أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس وأسلوب السمبلكس المعتاد:

تتمثل الفرق الأساسية بين أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس وبين أسلوب السمبلكس المعتاد فيما يلي:

- 1- في ظل أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس نبدأ أولاً بتحديد المتغير المؤهل للخروج من الحل، ثم بعد ذلك نقوم بتحديد المتغير المؤهل للدخول إلى الحل وذلك على عكس ما هو متبع في أسلوب السمبلكس المعتاد.
- 2- في ظل أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس يخرج من الحل المتغير صاحب أكبر رقم أمامه إشارة سالبة في عمود قيم متغيرات الحل أما في ظل أسلوب السمبلكس المعتاد فإن المتغير الذي يخرج من الحل هو المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب للقيم الموجودة في عمود قيم متغيرات الحل على القيم المقابلة في عمود المتغير الذي يدخل الحل (عمود البؤرة).

3- في ظل أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس يتم تحديد المتغير الذي يدخل الحل عن طريق قسمة الأرقام الموجودة في أعمدة المتغيرات غير الأساسية في الصف الأخير (م ز - ل ز) على الأرقام المناظرة في صف المتغير الذي يترك الحل واختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة (أقل قيمة مطلقة). أما في أسلوب السمبلكس المعتاد فالمتغير الذي يدخل الحل هو المتغير صاحب أكبر قيمة موجبة في الصف الأخير (م ز - ل ز) وذلك في حالة تعظيم الربح.

4- يتم حساب القيم الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) في ظل أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس عن طريق طرح معاملات دالة الهدف من قيم الصف (ل ز) وهذا عكس ما اعتدنا عليه في أسلوب السمبلكس المعتاد.

5- يساعد أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس في التغلب على مشكلة عدم إمكانية الحل (عند ظهور قيم سالبة أمام المتغيرات الأساسية في عمود قيم متغيرات الحل) والتي قد تظهر عند استخدام أسلوب السمبلكس المعتاد.



## تمارين علي الفصل الرابع

### تمرين (1):

إذا توفر لديك النموذج الرياضي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم (ر) } 3 \text{ س} 1 + 4 \text{ س} 2$$

في ظل أن:

$$20 \geq 3 \text{ س} 1 + 2 \text{ س} 2$$

$$30 \geq 4 \text{ س} 1 + 2 \text{ س} 2$$

$$\text{س} 1, \text{ س} 2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

### تمرين (2):

قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{عظم (ر) } 10 \text{ س} 1 + 9 \text{ س} 2$$

في ظل أن:

$$630 \geq \frac{7}{10} \text{ س} 1 + 2 \text{ س} 2$$

$$600 \geq \frac{1}{2} \text{ س} 1 + \frac{5}{6} \text{ س} 2$$

$$708 \geq \frac{2}{3} \text{ س} 1 + 2 \text{ س} 2$$

$$135 \geq \frac{1}{10} \text{ س} 1 + \frac{1}{4} \text{ س} 2$$

$$\text{س} 1, \text{ س} 2 \leq \text{صفر}$$

### تمرين (3):

إذا توفر لديك النموذج الأصلي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم (ر) } 5 \text{ س} 1 + 6 \text{ س} 2$$

في ظل أن:

$$5 = 2 \text{ س} 1 + 2 \text{ س} 2$$

$$-s_1 + 5s_2 \leq 3$$

$$4s_1 + 7s_2 \geq 8$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

تمرين (4): قم بكتابة الصيغة الثنائية لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{تدنية (ت) } = 5s_1 - 2s_2$$

في ظل أن:

$$-s_1 + 2s_2 \leq 3$$

$$2s_1 + 3s_2 \geq 5$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

تمرين (5): إذا توفر لديك النموذج الأصلي التالي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

$$\text{عظم (ر) } = 6s_1 + 4s_2$$

في ظل أن:

$$2s_1 + s_2 \geq 20$$

$$s_1 + 2s_2 \geq 16$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب:

1- اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

2- قارن بين نتائج حل كل من النموذج الأصلي والنموذج الثنائي باستخدام أسلوب السمبلكس.

تمرين (6): إذا كان النموذج الأصلي لأحد مشاكل البرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{عظم (ر) } = s_1 + 5s_2 + 3s_3$$

في ظل أن:



$$س_1 + 2س_2 + 3س_3 = 3$$

$$2س_1 - س_2 = 4$$

$$س_1 ، س_2 ، س_3 \leq \text{صفر}$$

المطلوب: اشتقاق النموذج الثنائي (المقابل) للنموذج الأصلي السابق.

تمرين (7): إذا كان النموذج الأصلي لأحد مشاكل البرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{عظم (ر)} = 10س_1 + 9س_2$$

في ظل أن:

$$5س_1 + 4س_2 \geq 120$$

$$2س_1 + 4س_2 \geq 60$$

$$س_1 ، س_2 \leq \text{صفر}$$

المطلوب:

1- حل المشكلة السابقة باستخدام أسلوب السمبلكس.

2- عمل الصياغة الثنائية مع حلها باستخدام أسلوب السمبلكس.

3- وضح ماذا تلاحظ بين الحل الأمثل في ظل الصياغة الأصلية والحل

الأمثل في ظل الصياغة الثنائية.

تمرين (8): الجدول التالي يعبر عن الحل الأمثل للنموذج الثنائي لمشكلة

البرمجة الخطية التالية:

$$\text{تدنية (ت)} = 120س_1 + 240س_2$$

في ظل أن:

$$2س_1 + 2س_2 \leq 0.5$$

$$س_1 + 3س_2 \leq 0.4$$

م ز		120	240	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ف <sub>1</sub>	ف <sub>2</sub>	و <sub>1</sub>
120	ص <sub>1</sub>	0.175	1	صفر	$\frac{3}{4}$ -	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ -
240	ص <sub>2</sub>	0.075	صفر	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ -	$\frac{1}{4}$ -
	ل ز	39	120	240	30 -	60 -	60
	م ز - ل ز		صفر	صفر	30	60	م-30 م-60

المطلوب:

- 1- ايجاد الصياغة الأصلية لهذه المشكلة.
- 2- تحديد قيم متغيرات الحل الأمثل للنموذج الأصلي وتحديد قيمة الحل الأمثل للنموذج الأصلي (وذلك باستخدام الحل الأمثل للنموذج الثنائي وبدون حل النموذج الأصلي).





## الفصل الخامس

### تحليل الحساسية في البرمجة الخطية

#### Sensitivity Analysis

- مفهوم أسلوب تحليل الحساسية.
- أنماط تحليل الحساسية في البرمجة الخطية:
  - النمط الأول: تحديد أثر التغير في كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر في القيود.
  - النمط الثاني: تحديد أثر التغير في معاملات دالة الهدف.
  - النمط الثالث: تحديد أثر التغير في المعاملات الفنية لمتغيرات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود).
  - النمط الرابع: تحديد أثر إضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية.
- تمارين للتدريب.



## تحليل الحساسية في البرمجة الخطية

مفهوم أسلوب تحليل الحساسية:

يعتبر نموذج البرمجة الخطية أحد نماذج التأكد التام، حيث يمكن القول أن ثوابت هذا النموذج سواء ما كان منها متعلقاً بدالة الهدف أو متعلقاً بموارد الطرف الأيسر للقيود أو خاصاً بمصفوفة معاملات الطرف الأيمن هي ثوابت معلومة ومؤكدة على وجه اليقين.

وعلى الرغم من ذلك فإن هذا الافتراض قد يجانبه الصواب في بعض الأحيان، حيث قد تكون معرفتنا بها معرفة جزئية في أحيان أخرى حيث تسود ظروف عدم التأكد عند قياس واحد أو أكثر منها الأمر الذي يتطلب ضرورة تحديد أثر التغير في بعض هذه الثوابت على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية موضع الدراسة والتحليل.

وفي ضوء ذلك يمكن القول أن عمليتي تكوين نموذج البرمجة الخطية وحساب الحل الأمثل لهذا النموذج لا تمثلان تحليلاً كاملاً لمشكلة البرمجة الخطية، وإنما يتطلب الأمر ضرورة وجود عملية ثالثة تعرف باسم تحليل الحساسية يجب إجرائها لاستكمال التحليل الخاص بمشكلة البرمجة الخطية.

وبعد أن نصل إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، يكون في الغالب هناك تساؤل عما سوف يحدث لهذا الحل إذا تغير أحد أجزاء المشكلة التي تم حلها ومثال ذلك:

1- ماذا يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت القيمة الموجودة في الطرف الأيسر لأحد القيود (والتي تعبر عن الموارد المتاحة).

2- ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت أحد القيم الموجودة في دالة الهدف (معاملات دالة الهدف).

3- ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت المعاملات الموجودة في

الطرف الأيمن من متباينات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود).

في مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية سوف يتغير أم سيبقى كما هو. وإذا كان سوف يتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخرى بالقيم الجديدة للوصول إلى الحل الأمثل ، هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخرى؟ الإجابة على ذلك تكمن فيما يسمى بتحليل الحساسية.

ويقصد بتحليل الحساسية "درجة حساسية الحل الأمثل الحالي للتغير الذي قد يطرأ على أحد القيم الأساسية في المشكلة الأصلية لنموذج الخطية (دالة الهدف + القيود).

بمعنى آخر: ماذا يحدث لو توصلنا إلى جدول الحل الأمثل ثم تغيرت أحد أجزاء المشكلة، أى ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل الحالي؟

هذا ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن أسلوب تحليل الحساسية يبحث أثر التغير فى قيم ثوابت نموذج البرمجة الخطية على أساس فردى، فيختار أحد الثوابت ويقوم بدراسة أثر التغير فى قيمته وذلك مع ثبات قيم الثوابت الأخرى على ما هى بدون تغيير، وبالتالي فإنه إذا تغيرت القيم لأكثر من ثابت فى آن واحد فإنه لا يمكن الاعتماد على أسلوب تحليل الحساسية حتى وإن كانت هذه التغيرات داخل الحدود المقررة سلفاً . بمعنى أن أسلوب تحليل الحساسية يقتصر على بيان وتوضيح إلى أى مدى يظل الحل الأمثل للمشكلة حلاً أمثل إذا تغيرت فقط قيمة أحد متغيرات مشكلة البرمجة الخطية.

**أنماط تحليل الحساسية فى البرمجة الخطية:**

يتضمن تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية أربعة أنماط أساسية تتمثل

فى:



1- تحديد أثر التغير في كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر في القيود.

2- تحديد أثر التغير في معاملات دالة الهدف أى التغير في مساهمة الوحدة.

3- تحديد أثر التغير في المعاملات الفنية لمتغيرات القيود أى تغير المعاملات في الطرف الأيمن في متباينات القيود.

4- تحديد أثر اضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية.

ونتناول كل نمط من هذه الأنماط بالدراسة والتحليل كما يلي:

**النمط الأول: تحديد أثر التغير في كميات الموارد المتاحة أو قيم الطرف الأيسر في القيود:**

تعرف القيم على الجانب الأيسر لقيود مشكلة البرمجة الخطية بالموارد أو المصادر المتاحة، وهذه الموارد أو المصادر عرضة للتغيير، ومما هو جدير بالذكر عند حل نموذج البرمجة الخطية أن جميع هذه الموارد أو المصادر يجب أن تكون أكبر من أو يساوى ( $\leq$ ) الصفر، لأن ذلك يعنى أن التغيير الذى يمكن أن يصاحب هذه الموارد أو المصادر يجب ألا يجعل قيم العوامل الأساسية قيماً سالبة في الجانب الأيسر.

ونظراً لأن سعر الظل عبارة عن التغير الذى يحدث في دالة الهدف والذى ينتج عن زيادة الكميات من الموارد على الجانب الأيسر لكل قيد من قيود هذه الموارد بمقدار وحدة واحدة، لذا فإن هذا السعر هو الذى يوفر المعلومات المتعلقة بقيم الموارد الإضافية، حيث يمكننا من تحديد مقدار الوحدات الإضافية التى يمكن الحصول عليها من الموارد المتاحة في كل قيد من قيود المشكلة، وبالتالي فإنه من خلال تحليل القيم على الجانب الأيسر لقيود هذه المشكلة يمكن معرفة المدى (الحدين الأدنى والأعلى) والذى يظل فيه سعر الظل فعالاً.

ومما تجدر الإشارة إليه عند تحديد الحدين الأدنى والأعلى لمدى التغير في كميات الموارد المتاحة لقيود مشكلة البرمجة الخطية ضرورة التفرقة بين كل من الموارد النادرة التي يمكن التحكم فيها وهي تمثل تلك الموارد التي يمكن استغلالها بالكامل، والموارد الأخرى النادرة والتي لا يمكن التحكم فيها وتتمثل في تلك الموارد التي لا يمكن استغلالها بالكامل.

هذا ويمكن تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذي يمكن أن تتغير في ضوءه كميات الموارد المتاحة على الجانب الأيسر من قيود مشكلة البرمجة الخطية وذلك دون أن يتغير مزيج الحل الأمثل بحث تظل المتغيرات الأساسية للحل كما هي ودون أن تؤثر على أسعار الظل كما يلي:

أ- إيجاد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذي يمكن أن تتغير في ضوءه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التي لا يمكن التحكم فيها عن طريق عدم استغلالها بالكامل:

خطوات تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) في هذه الحالة كما يلي:

1- يتم تحديد الحد الأدنى لهذا المورد عن طريق طرح قيمة المتغير العاطل الذي يشير إلى هذا المورد من الكمية المتاحة له والتي تمثل قيمة الطرف الأيسر الخاصة بهذا القيد.

الحد الأدنى = الكمية المتاحة من المورد - قيمة المتغير العاطل الخاص بهذا المورد.

2- يتم تحديد الحد الأعلى لهذا المورد باعتباره يساوي موجب ما لا نهاية ( $+\infty$ ) وذلك على اعتبار أن إضافة أية كمية تزيد من مقدار الطرف الأيسر لهذا المورد لن يؤثر على مزيج الحل الأمثل.

ملحوظة: يقصد بالمورد النادر الذي لا يمكن التحكم فيه عن طريق عدم استغلاله بالكامل بالمتغير العاطل (ع) الذي ظهر ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل.



ب- ايجاد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذى يمكن أن تتغير فى ضوءه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التى يمكن التحكم فيها عن طريق استغلالها بالكامل:

خطوات تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) فى هذه الحالة كما يلى:

1- تحديد المتغير العاقل (ع) الذى أضيف إلى معادلة القيد الذى تغير الجانب الأيسر له.

2- تحديد قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية + (معاملات عمود المتغير العاقل الخاص بالموارد الذى تغير  $\times \Delta$ ) .

3- حتى يظل الحل الأمثل الحالى ممكناً فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة لكل المتغيرات الأساسية قيم غير سالبة ، بمعنى أن تكون  $\leq$  صفر.

4- للحكم على ما إذا كانت الزيادة فى قيمة المورد النادر تؤدي إلى جعل الحل الأمثل الحالى ممكناً أو غير ممكن نطبق القاعدة التالية:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{قيم الطرف الأيسر} \\ \text{بعد الزيادة} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{مصفوفة المتغيرات التى بدأنا} \\ \text{بها جدول الحل المبدئى وذلك فى} \\ \text{جدول الحل الأمثل} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{قيم متغيرات الحل} \\ \text{بعد الزيادة} \end{array} \right]$$

فإذا كانت كل القيم فى عمود قيم متغيرات الحل بعد الزيادة (الجديدة) موجبة فهذا يعنى أن الحل الأمثل الحالى حلاً ممكناً ومثالي فى نفس الوقت.

ملحوظة: يقصد بالموارد النادر الذى يمكن التحكم فيه عن طريق استغلاله بالكامل بالمتغير العاقل (ع) الذى ظهر ضمن المتغيرات غير الأساسية فى جدول الحل الأمثل.

مثال (1):

فيما يلي جدول الحل الأمثل النهائي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

رياح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م			
			س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	ع <sub>1</sub>	ع <sub>2</sub>
40	س <sub>1</sub>	110	1	صفر	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$
30	س <sub>2</sub>	25	صفر	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$
	ل	5150	40	30	$\frac{25}{4}$	$\frac{35}{12}$
	م - ل		صفر	صفر	$-\frac{25}{4}$	$-\frac{35}{12}$

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هي:

$$5 \text{ س}_1 + 2 \text{ س}_2 \geq 600 \text{ (المورد الأول)}$$

$$3 \text{ س}_1 + 6 \text{ س}_2 \geq 480 \text{ (المورد الثاني)}$$

المطلوب:

- 1- ما هو المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً؟
- 2- ما هو المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثاني مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً؟
- 3- إذا زادت قيمة المورد الثاني بمقدار (20) وحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

الحل

- 1- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:

يلاحظ أن التغير في قيمة الموارد المتاحة سوف يؤثر فقط على العمود الخاص بقيم متغيرات الحل وهذا معناه التأثير في مدى امكانية الوصول



إلى حل ممكن للمشكلة. وحتى يكون الحل الجديد حلاً ممكناً فيجب ألا تكون قيم المتغيرات الأساسية قيم سالبة.

توجد طريقتين لتحديد ذلك المدى وهما:

**الطريقة الأولى:** تحديد المتغير العاقل الذي أضيف إلى معادلة القيد الأول

نجد (1ع) ← متغير غير أساسي، وحتى يظل الحل الأمثل الحالي ممكناً

فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير في قيمة المورد

الأول قيم غير سالبة بمعنى أن تكون  $\leq$  صفر

أ- قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية +  $\Delta_1$  (معاملات عمود 1ع في جدول الحل

الأمثل)

$$\text{عند س}_1 \leftarrow \Delta_1 \frac{1}{4} + 110$$

$$\text{عند س}_2 \leftarrow \Delta_1 \frac{1}{8} - 25$$

ب- وحتى يظل الحل الأمثل الحالي ممكناً لابد أن تكون قيم متغيرات الحل

الجديدة  $\leq$  صفر

\* بالنسبة لـ  $\text{س}_1$  نجد أن:

$$110 + \Delta_1 \frac{1}{4} \leq \text{صفر}$$

$$\therefore \Delta_1 \frac{1}{4} \leq -110 \text{ بالضرب في (4)}$$

$$\therefore \Delta_1 \leq -440 \leftarrow (1)$$

\* بالنسبة لـ  $\text{س}_2$  نجد أن:

$$-25 + \Delta_1 \frac{1}{8} \leq \text{صفر}$$

$$-25 + \Delta_1 \frac{1}{8} \leq \text{صفر بالضرب في 8}$$

$$-200 + \Delta_1 \leq \text{صفر بالضرب في -1 مع تغيير اشارة المتباينة}$$

$$\Delta_1 \geq 200 \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2) فإن :

$$200 \geq \Delta \geq 440 -$$

ويعنى هذا أن هناك مدى معين للتغير الذى يمكن أن يحدث فى الطرف الأيسر للقيد الأول، دون أن يتغير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة فى الحل الأمثل الحالى وهذا المدى هو بين 200 ، - 440 .

أى أن قيمة المورد الأول يمكن أن تنخفض إلى  $(440 - 600) = 160$  وحدة، وتزيد إلى أن تصل  $(200 + 600) = 800$  وحدة ويظل الحل الأمثل ممكناً.

الحد الأدنى للتغير فى قيمة المورد الأول  $= 600 - 440 = 160$  وحدة.

الحد الأعلى للتغير فى قيمة المورد الأول  $= 600 + 200 = 800$  وحدة.

الطريقة الثانية: تجدر الإشارة إلى أنه توجد طريقة أخرى تمكن من تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى الذى يمكن أن تتغير فى ضوءه كميات الموارد المتاحة من الموارد النادرة التى يمكن التحكم فيها عن طريق استغلالها بالكامل (أى المتغيرات العاطلة (ع) التى ظهرت ضمن المتغيرات غير الأساسية فى جدول الحل المثل).

وتتمثل خطوات تلك الطريقة فيما يلى:

1- يتم تحديد الحد الأدنى لهذا المورد عن طريق قسمة الأرقام الواردة فى عمود قيم متغيرات الحل بجدول الحل الأمثل على قيم معاملات عمود المتغير العاطل الذى يشير إلى هذا المورد ثم طرح أصغر ناتج قسمة موجب من كمية الموارد المتاحة للقيد.

2- يتم تحديد الحد الأعلى لهذا المورد عن طريق قسمة الأرقام الواردة فى عمود قيم متغيرات الحل بجدول الحل الأمثل على قيم معاملات عمود المتغير العاطل الذى يشير إلى هذا المورد بعد ضربها فى (-1) ثم إضافة أصغر ناتج قسمة موجب إلى كمية الموارد المتاحة للقيد.



وبتطبيق تلك الطريقة على المثال السابق (رقم 1) يمكن تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذي يمكن أن يتغير في حدوده قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً كما يلي:

\* المورد الأول ← يعبر عنه المتغير العاقل (ع1)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	عمود (ع1)	عمود (ع1) × 1 -	عمود (1) ÷ عمود (2)	عمود (1) ÷ عمود (3)
110	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ -	440	440 -
25	$\frac{1}{8}$ -	$\frac{1}{8}$	200 -	200

∴ الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول - أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)  
 $= 600 - 440 = 160$  وحدة .

∴ الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الأول

= الكمية المتاحة من المورد الأول + أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)  
 $= 600 + 200 = 800$  وحدة .

وهي نفس النتائج التي تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الأولى.

2- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثاني مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:

الطريقة الأولى: تحديد المتغير العاقل الذي أضيف إلى معادلة القيد الثاني

نجد (ع2) ← متغير غير أساسي، وحتى يظل الحل الأمثل الحالي ممكناً

فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير في قيمة المورد الثاني قيم غير سالبة بمعنى أن تكون  $\leq$  صفر

أ- قيم متغيرات الحل الجديدة

= قيم متغيرات الحل الأصلية +  $2\Delta$  (معاملات عمود ع2 في جدول الحل الأمثل)

$$\text{عند س}_1 \leftarrow 2\Delta \frac{1}{12} - 110$$

$$\text{عند س}_2 \leftarrow 2\Delta \frac{5}{24} + 25$$

ب- وحتى يظل الحل الأمثل الحالي ممكناً لابد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة  $\leq$  صفر

\* بالنسبة لـ  $\text{س}_1$  نجد أن:

$$2\Delta \frac{1}{12} - 110 \leq \text{صفر}$$

$$-110 \leq 2\Delta \frac{1}{12} \quad \text{بالتضرب في 12}$$

$$\therefore -1320 \leq 2\Delta \quad \text{بالتضرب في -1 مع تغيير إشارة المتباينة}$$

$$\therefore 2\Delta \geq -1320 \quad (1)$$

\* بالنسبة لـ  $\text{س}_2$  نجد أن:

$$2\Delta \frac{5}{24} + 25 \leq \text{صفر}$$

$$2\Delta \frac{5}{24} \leq -25 \quad \text{بالتضرب في (24)}$$

$$\therefore 5 \cdot 2\Delta \leq -600 \quad \text{بالقسمة على (5)}$$

$$\therefore 2\Delta \leq -120 \quad (2)$$

من (1) ، (2) فإن :

$$-1320 \leq 2\Delta \leq -120$$

الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الثاني =  $-480 - 120 = 360$  وحدة.

الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الثاني =  $480 + 1320 = 1800$  وحدة.



الطريقة الثانية: تحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) الذي يمكن أن يتغير في حدوده قيمة المورد الثاني مع بقاء الحل ممكناً كما يلي:

\* المورد الثاني ← يعبر عنه المتغير العاقل (ع2)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	عمود (ع2)	عمود (ع2) $\times 1 -$	عمود (1) $\div$ عمود (2)	عمود (1) $\div$ عمود (3)
110	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$1320 -$	1320
25	$\frac{5}{24}$	$-\frac{5}{24}$	120	$120 -$

∴ الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الثاني

= الكمية المتاحة من المورد الثاني - أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)

$$= 480 - 120 = 360 \text{ وحدة .}$$

∴ الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الثاني

= الكمية المتاحة من المورد الثاني + أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)

$$= 480 + 1320 = 1800 \text{ وحدة .}$$

وهي نفس النتائج التي تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الأولى.

3- إذا زادت قيمة المورد الثاني بمقدار (20) وحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم

امكانية الحل:

للحكم على إذا ما كانت الزيادة في قيمة المورد الثاني تؤدي إلى جعل الحل

الحالي ممكن أو غير ممكن، نطبق القاعدة التالية:

لتحديد أثر زيادة قيمة المورد الثاني نطبق القاعدة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{قيم متغيرات الحل} \\ \text{بعد الزيادة} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{قيم الطرف الأيسر} \\ \text{بعد الزيادة} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{مصفوفة المتغيرات} \\ \text{التي بدأنا بها جدول} \\ \text{الحل المبدئي وذلك في} \\ \text{جدول الحل الأمثل} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 600 \\ 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \\ \frac{5}{24} - \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س1} \\ \text{س2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (500 \times \frac{1}{12} - 600 \times \frac{1}{4}) \left[ \leftarrow \frac{325}{3} \right] \\ & (500 \times \frac{5}{24} + 600 \times \frac{1}{8} -) \left[ \leftarrow \frac{175}{6} \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{325}{3} = \text{س1}$$

$$\frac{175}{6} = \text{س2}$$

ويلاحظ أن كل القيم في عمود قيم متغيرات الحل الجديد موجبة وهذا يعنى أن الحل الحالى ممكن ومثالى فى نفس الوقت

$$\text{قيمة الحل الجديد} = \frac{325}{3} \times 40 + \frac{175}{6} \times 30 = 5208$$

لاحظ أن قيمة الحل (ربح الحل الجديد) زاد نتيجة لزيادة المورد الثانى بمقدار (20) وحدة من 5150 جنيه إلى 5208 جنيه.

**النمط الثانى: تحديد أثر التغير فى معاملات دالة الهدف:**

من المعلوم أن دالة الهدف تشمل مجموعة من المتغيرات يتم تصنيفها فى ضوء جدول الحد الأمثل إلى متغيرات أساسية وهى تلك المتغيرات التى تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية وتظهر فى عمود المتغيرات



الأساسية في جدول الحل الأمثل. ومتغيرات غير أساسية وهي تلك المتغيرات التي لا تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل بجدول السمبلكس النهائي. وتحتوي دالة هدف نموذج البرمجة الخطية على المتغيرات موضع الدراسة، وكذلك عائد المساهمة لكل وحدة من هذه المتغيرات والتي تعرف بمعاملات دالة الهدف، هذا ويتم تحليل الحساسية لهذه لمعاملات بغية تحديد مدى معين لقيمتها، ويعرف هذا المدى بالمدى الأمثل.

ويجب عند إجراء تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف أن يتم هذا التحليل لكل معامل على حدة بطريقة منفردة وذلك لضمان دقة التحليل، ويعنى ذلك أنه إذا تم تناول أحد معاملات دالة الهدف بالتحليل فإن المعاملات الأخرى في هذه الدالة سوف تظل ثابتة على ما هي عليه.

كما يجب أيضاً عند إجراء تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف ضرورة التفرقة بين كل من التغيرات التي تحدث في دالة الهدف للمتغيرات الأساسية والتغيرات الأخرى التي تحدث في معاملات هذه الدالة للمتغيرات غير الأساسية. ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

أولاً: التغيرات التي تحدث في معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية:

#### • حالة تعظيم الربح:

1- إذا حدث انخفاض في ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى فإن ذلك لا يؤثر على الحل الأمثل الحالى.

2- إذا حدثت زيادة في ربح الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية، فإنه توجد ثلاثة حالات وهي:

أ- إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى أكبر من معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن تلك الزيادة سوف تؤدي إلى حل آخر جديد وذلك لأن (م ز) < (ل ز).

ب- إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير غير الأساسي تساوى معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) بجدول الحل الأمثل، فإن الحل الأمثل الحالي يظل كما هو بدون تغيير مع ظهور حالة وجود أكثر من حل أمثل لأن (م ز) = (ل ز).

ج- إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير غير الأساسي أقل من معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) فإن هذه الزيادة لا تؤدي إلى أى تغيير في الحل الأمثل الحالي لأن (م ز) > (ل ز).

#### • حالة تدنية التكاليف:

1- إذا حدثت زيادة في تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي فإن ذلك لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي.

2- إذا حدث انخفاض في تكلفة الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية فإنه توجد ثلاثة حالات وهي:

أ- إذا كان الانخفاض في تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي أكبر من معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن الحل الحالي يصبح ليس هو الحل الأمثل لأن (م ز) > (ل ز).

ب- إذا كان الانخفاض في تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي تساوى معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) بجدول الحل الأمثل، فإن الحل الأمثل الحالي يظل كما هو بدون تغيير مع ظهور حالة وجود أكثر من حل أمثل لأن (م ز) = (ل ز).

ج- إذا كان الانخفاض في تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي أقل من معامل هذا المتغير في الصف الأخير (م ز - ل ز) بجدول الحل الأمثل فإن ذلك الانخفاض لا يؤدي إلى أى تغيير في الحل الأمثل الحالي لأن (م ز) < (ل ز).



ولتحديد مدى التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية بحيث يظل الحل الأمثل دون تغيير فإن الأمر يتطلب ضرورة اتباع الخطوتين التاليتين:

1- يتم تحديد الحد الأدنى لمدى التغير في معامل المتغير غير الأساسي في صورة سالب مالا نهاية (  $-\infty$  ) وهذا يعنى أن معامل هذا المتغير يمكن أن يتناقص إلى مالا نهاية، وفي نفس الوقت يظل الحل الأمثل الذى توصلنا إليه كما هو دون تغيير.

2- يتم تحديد الحد الأعلى لمدى التغير في معامل المتغير غير الأساسي عن طريق جمع خسارة الفرصة البديلة لهذا المتغير على الربح الحدى للوحدة الواحدة من المنتج الذى يمثله هذا المتغير.

أى أن الحد الأعلى لمدى التغير في معامل المتغير غير الأساسي تساوى الزيادة في مقدار الربح لهذا المتغير والذي يساوى القيمة المطلقة المذكورة له في الصف الأخير (م ز - ل ز) مضافاً إليها مساهمة الوحدة من ذلك المتغير في دالة الهدف.

والخلاصة: الحد الأعلى لمدى التغير في معامل المتغير غير الأساسي = القيمة المطلقة لمعامل المتغير غير الأساسي في الصف الأخير (م ز - ل ز) + مساهمة الوحدة من ذلك المتغير في دالة الهدف.

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أن تحديد المدى الأمثل لمعاملات المتغيرات غير الأساسية يتسم بالبساطة والسهولة، ويرجع ذلك بطبيعة الحال إلى أن التغير فى قيمة هذه المعاملات يؤثر على القيمة الواقعة تحته فى الصف الأخير (م ز - ل ز)، بمعنى أنه يؤثر على نفسه فقط ولا يؤثر على المتغيرات الأخرى.

مثال (2):

فى المثال السابق (رقم 1) المطلوب تحديد:

1- ما هو المدى الذي يمكن أن يتغير في ظلّه ربح الوحدة من المتغير (1ع)  
ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير؟

2- ما هو المدى الذي يمكن أن يتغير في ظلّه ربح الوحدة من المتغير (2ع)  
ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير؟  
الحل

1- تحديد المدى الذي يمكن أن يتغير في ظلّه ربح الوحدة من المتغير (1ع)  
ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن (1ع) متغير غير أساسي، فإن انخفاض ربح الوحدة منه إلى سالب  
مالا نهاية  $(-\infty)$  لن يؤثر على الحل الأمثل وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى  
التغير في ربح المتغير (1ع)  $= (-\infty)$ .

الحد الأعلى للزيادة في ربح الوحدة من المتغير (1ع)

= القيمة المطلقة لمعامل المتغير (1ع) في الصف الأخير (م ر - ل ر) +  
مساهمة الوحدة من المتغير (1ع) في دالة الهدف

$$= \frac{25}{4} + \text{صفر} = \frac{25}{4}$$

وبالتالي فإن مدى التغير في ربح الوحدة من (1ع) هو:

$$-\infty < \text{ر} \leq \frac{25}{4}$$

2- تحديد المدى الذي يمكن أن يتغير في ظلّه ربح الوحدة من المتغير (2ع)  
ويظل الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن (2ع) متغير غير أساسي، فإن انخفاض ربح الوحدة منه إلى سالب  
مالا نهاية  $(-\infty)$  لن يؤثر على الحل الأمثل وبالتالي فإن الحد الأدنى لمدى  
التغير في ربح المتغير (2ع)  $= (-\infty)$ .

الحد الأعلى للزيادة في ربح الوحدة من المتغير (2ع)



= القيمة المطلقة لمعامل المتغير (2ع) في الصف الأخير (م ز - ل ز) +  
مساهمة الوحدة من المتغير (2ع) في دالة الهدف

$$= \frac{35}{12} + \text{صفر} = \frac{35}{12}$$

وبالتالى فإن مدى التغير في ربح الوحدة من (2ع) هو

$$-\infty < \text{ر} \leq \frac{35}{12}$$

ثانياً: التغيرات التى تحدث فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية:

يقصد بالمتغيرات الأساسية تلك المتغيرات التى تدخل ضمن مزيج الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية. وتجدر الإشارة إلى أن التغير فى مساهمة الوحدة لأى متغير أساسى فى الحل الأمثل لابد وأن يؤثر على كل قيم الصف الأخير (م ز - ل ز) الخاصة بكافة المتغيرات غير الأساسية فى الحل الأمثل، فى حين أن التغير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات غير الأساسية لم يؤثر إلا نفس المتغير فقط.

لاحظ أيضاً أن التغير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الأساسية يمكن أن يكون بالزيادة أو الانخفاض وعلى هذا :

1- إذا كان التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى بالزيادة فيجب أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات سالبة فى صف ذلك المتغير الأساسى.

2- إذا كان التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى بالانخفاض فيجب أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات موجبة فى صف ذلك المتغير الأساسى.

**خطوات تحديد مدى التغير فى مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى:**

1- قسمة الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) على الأرقام المقابلة فى صف المتغير الأساسى المطلوب تحديد مدى التغير فى

معاملة مع عدم السماح بالقسمة على صفر (أي تجاهل جميع النسب التي تتضمن صفر في المقام)

- 2- اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة السابقة (أي أقرب رقم سالب إلى الصفر) ثم جمعها على معامل ذلك المتغير الأساسي في دالة الهدف وذلك لتحديد الحد الأدنى الذي يمكن أن يحدث في معامل هذا المتغير في هذه الدالة، بينما إذا لم توجد قيمة سالبة فإن أقصى نقص يصبح  $(-\infty)$ .
- 3- اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة في الخطوة (1)، ثم جمعها على معامل المتغير الأساسي في دالة الهدف وذلك لتحديد الحد الأعلى لمدى تغير هذا المعامل في هذه الدالة، بينما إذا لم توجد قيمة موجبة فإن أقصى زيادة تصبح  $(+\infty)$ .

مثال (3): في المثال السابق (رقم 1) المطلوب تحديد:

- 1- مدى التغير في ربح الوحدة من (س<sub>1</sub>) مع بقاء الحل الأمثل كما هو.

الحل

خطوات تحديد مدى التغير في ربح الوحدة من (س<sub>1</sub>) تتمثل فيما يلي:

- 1- قسمة الأرقام الموجودة في الصف الأخير (م ز - ل ز) على الأرقام المقابلة في صف المتغير الأساسي (س<sub>1</sub>) في جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) مع عدم السماح بالقسمة على صفر كما يلي:



(1)	(2)	(3)
أرقام الصف (م ز - ل ز)	أرقام صف المتغير (س <sub>1</sub> )	عمود (1) ÷ عمود (2)
صفر	1	صفر
$\frac{25}{4} -$	$\frac{1}{4}$	$25 -$
$\frac{35}{12} -$	$\frac{1}{12} -$	35

2- اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة في الجدول السابق (أى أقرب رقم سالب إلى الصفر) فنجده (-25) ثم جمعها على معامل المتغير (س<sub>1</sub>) في دالة الهدف (40).

∴ الحد الأدنى لمدى التغير في ربح الوحدة من (س<sub>1</sub>) في دالة الهدف

$$= -25 + 40 = 15 \text{ جنيه}$$

3- اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة في الجدول السابق فنجدها

(35) ثم جمعها على معامل المتغير (س<sub>1</sub>) في دالة الهدف (40)

∴ الحد الأعلى لمدى التغير في ربح الوحدة من (س<sub>1</sub>) في دالة الهدف

$$= 35 + 40 = 75 \text{ جنيه}$$

وبالتالى فإن مدى التغير في ربح الوحدة من (س<sub>1</sub>) هو

$$15 \leq R \leq 75$$

مثال (4):

فيما يلي جدول الحل الأمثل النهائي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			64	100	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع1	ع2	ع3	ع4
100	س2	750	صفر	1	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر	$-\frac{3}{2}$
صفر	ع2	750	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	1	صفر	$-\frac{13}{2}$
صفر	ع3	250	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	صفر	1	$-\frac{7}{2}$
64	س1	1250	1	صفر	$-\frac{1}{2}$	صفر	صفر	$\frac{5}{2}$
ل ز		155000	64	100	18	صفر	صفر	10
م ز - ل ز			صفر	صفر	18-	صفر	صفر	10-

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هي :

$$3 \text{ س1} + 5 \text{ س2} \geq 7500 \leftarrow (\text{المورد الأول})$$

$$5 \text{ س1} + 4 \text{ س2} \geq 10000 \leftarrow (\text{المورد الثاني})$$

$$2 \text{ س1} + \text{س2} \geq 3500 \leftarrow (\text{المورد الثالث})$$

$$\text{س1} + 2 \text{ س2} \geq 2000 \leftarrow (\text{المورد الرابع})$$

المطلوب:

1- ما هو المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل

الأمثل حلاً ممكناً ؟

2- ما هو المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل

الأمثل حلاً ممكناً ؟

3- إذا زادت قيمة المورد الثالث بمقدار (500) وحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم

امكانية الحل؟

4- ما هو مدى التغير في الربح الذي يمكن أن يحدث بالنسبة للمتغير (س2)

والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو؟



## الحل

المطلوب الأول: تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً:

المورد الأول يعبر عنه المتغير العاقل (ع<sub>1</sub>)  
وتوجد طريقتين لتحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى):  
الطريقة الأولى:

حتى يظل الحل الأمثل ممكناً فلا بد أن تكون قيم متغيرات الحل الجديدة نتيجة لحدوث التغير فى قيمة المورد الأول قيم غير سالبة بمعنى تكون  $\leq$  صفر  
قيم متغيرات الحل الجديدة

$= =$  قيم متغيرات الحل الأصلية  $+ \Delta_1$  (معاملات عمود ع<sub>1</sub> فى جدول الحل الأمثل)

قيم متغيرات الحل الأصلية معاملات ع<sub>1</sub>

$$\begin{array}{l} 750 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر} \\ 750 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر} \\ 250 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر} \\ -1250 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر} \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Delta_1 + \begin{bmatrix} 750 \\ 750 \\ 250 \\ 1250 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{س}_2 \\ \text{ع}_2 \\ \text{ع}_3 \\ \text{س}_1 \end{array}$$

\* بالنسبة لـ س<sub>2</sub> نجد أن:

$$750 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر}$$

$$\therefore \Delta_1 \frac{1}{2} \leq -750 \quad \text{بالضرب فى (2)}$$

$$\therefore \Delta_1 \leq -1500 \quad (1)$$

\* بالنسبة لـ ع<sub>2</sub> نجد أن:

$$750 + \Delta_1 \frac{1}{2} \leq \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \Delta_1 \leq 750 - \text{بالضرب في } 2$$

$$\therefore \Delta_1 \leq 1500 \leftarrow (2)$$

\* بالنسبة لـ  $\Delta_3$  نجد أن:

$$250 + \frac{1}{2} \Delta_1 \leq \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \Delta_1 \leq 250 - \text{بالضرب في } 2$$

$$\therefore \Delta_1 \leq 500 \leftarrow (3)$$

\* بالنسبة لـ  $\Delta_2$  نجد أن:

$$1250 - \frac{1}{2} \Delta_1 \leq \text{صفر}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \Delta_1 \leq 1250 - \text{بالضرب في } (2)$$

$$\therefore -\Delta_1 \leq 2500 - \text{بالضرب في } (-1) \text{ مع تغيير اشارة المتباينة.}$$

$$\therefore \Delta_1 \geq 2500 \leftarrow (4)$$

من (1) ، (2) ، (3) ، (4) فإن:

$$2500 \geq \Delta_1 \geq 500 -$$

$$\therefore \text{الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الأول} = 7500 - 500 = 7000$$

وحدة

$$\therefore \text{الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الأول} = 7500 + 2500 = 10000$$

وحدة

أى أن قيمة المورد الأول يمكن أن تنخفض إلى (7000) وحدة وتزيد إلى (10000) وحدة دون أن يكون ذلك على الحل الأمثل وامكانيته.

الطريقة الثانية: لتحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً.

\* المورد الأول يعبر عنه بالمتغير العاقل (1ع) بمعنى أنه تم اضافة المتغير (1ع) إلى معادلة القيد الأول.



لتحديد المدى (الحدين الأدنى والأعلى) تكون الجدول التالي:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عمود قيم متغيرات الحل	عمود (١ع)	عمود (١ع) $\times 1 -$	عمود (1) $\div$ عمود (2)	عمود (1) $\div$ عمود (3)
750	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1500	1500-
750	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1500	1500-
250	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	500	500-
1250	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2500 -	2500

∴ الحد الأدنى للتغير في قيمة المورد الأول

$$= = \text{الكمية المتاحة من المورد الأول} - \text{أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (4)} \\ = 7500 - 500 = 7000 \text{ وحدة}$$

∴ الحد الأعلى للتغير في قيمة المورد الأول

$$= \text{الكمية المتاحة من المورد الأول} + \text{أصغر ناتج قسمة موجب بالعمود (5)} \\ = 7500 + 2500 = 10000 \text{ وحدة}$$

لاحظ أن نتائج الطريقة الثانية هي نفس نتائج الطريقة الأولى.

المطلوب الثاني: تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل الأمثل حلاً ممكناً.

المورد الثالث يعبر عنه بالمتغير العاقل (3ع) بمعنى أنه تم إضافة المتغير (3ع) إلى معادلة القيد الثالث.

وحيث أن المتغير (3ع) ظهر ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل النهائي فيمكن حساب المدى (الحد الأدنى والأعلى) لهذا المورد كما يلي:

\* الحد الأدنى للمتغير في قيمة المورد الثالث

= الكمية المتاحة من المورد الثالث - قيمة المتغير العاقل (3ع) في عمود قيم متغيرات الحل

$$= 3500 - 250 = 3250 \text{ وحدة .}$$

\* الحد الأعلى للمتغير في قيمة المورد الثالث = موجب ما لا نهاية ( + ∞ ).

المطلوب الثالث: تحديد أثر زيادة قيمة المورد الثالث بمقدار (500) وحدة على إمكانية الحل الأمثل:

نطبق القاعدة التالية:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{مصفوفة المتغيرات التي بدأنا} \\ \text{بها جدول الحل المبدئي في جدول} \\ \text{الحل الأمثل} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{قيم الطرف الأيسر} \\ \text{بعد الزيادة} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{قيم متغيرات الحل بعد} \\ \text{الزيادة} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} 7500 \\ 10000 \\ 4000 \\ 2000 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccc} \frac{3}{2} - & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \frac{13}{2} - & \text{صفر} & 1 \\ \frac{7}{2} - & 1 & \text{صفر} \\ \frac{5}{2} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{س2} \\ \text{ع2} \\ \text{ع3} \\ \text{س1} \end{array} \right]$$

$$\text{س2} - \left[ 7500 \times \frac{1}{2} + 10000 \times \text{صفر} + 4000 \times \text{صفر} - 2000 \times \frac{3}{2} \right] = 750$$

$$\text{ع2} - \left[ 7500 \times \frac{1}{2} + 10000 \times 1 + \text{صفر} \times 4000 - 2000 \times \frac{13}{2} \right] = 750$$



$$\text{ع3 - } 750 = [2000 \times \frac{7}{2} - 4000 \times 1 + 10000 \times \text{صفر} + 7500 \times \frac{1}{2}]$$

$$\text{س1 } 1250 = [2000 \times \frac{5}{2} + 4000 \times \text{صفر} + 10000 \times \text{صفر} + 7500 \times \frac{1}{2}]$$

لاحظ أن كل قيم متغيرات الحل الجديدة موجبة وهذا يعنى أن الحل الحالى حل ممكن.

$$\text{قيمة الحل الجديد} = (750 \times 100) + (\text{صفر} \times 750) + (\text{صفر} \times 750) + (64 \times 1250) = 155000 \text{ جنيه}$$

لاحظ أن قيمة الحل لم تتغير بعد الزيادة فى المورد الثالث.

المطلوب الرابع: تحديد مدى التغير فى ربح الوحدة من المتغير (س2) مع بقاء الحل الأمثل كما هو بدون تغيير:

حيث أن المتغير (س2) ظهر من ضمن المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل، فيمكن تحديد مدى التغير فى ربح الوحدة من (س2) كما يلى:

1- قسمة الأرقام الموجودة فى الصف الأخير (م ز - ل ز) على الأرقام المقابلة فى صف المتغير (س2) مع تجاهل جميع النسب التى تتضمن صفر فى المقام كما يلى:

$$\text{صفر} \div 1 = \text{صفر} ، -18 \div \frac{1}{2} = -36 ، -10 \div \frac{3}{2} = -\frac{20}{3}$$

2- اختيار أكبر قيمة سالبة من ناتج القسمة فى الخطوة (1) (أى أقرب رقم سالب إلى الصفر) فنجده (-36) ثم جمعها على معامل المتغير (س2) فى دالة الهدف وهى (100)

∴ الحد الأدنى لمدى التغير فى ربح الوحدة من (س2) فى دالة الهدف

$$= -36 + 100 = 64$$

3- اختيار أصغر قيمة موجبة من ناتج القسمة فى الخطوة (1) فنجدها

$$(\frac{20}{3}) \text{ ثم جمعها على معامل المتغير (س2) فى دالة الهدف وهى (100)}$$

∴ الحد الأعلى لمدى التغير فى ربح الوحدة من (س2) فى دالة الهدف

$$100 \frac{20}{3} = 100 + \frac{20}{3} =$$

وبالتالى فإن مدى التغير فى ربح الوحدة من (س2) هو

$$64 \geq r \geq 100 \frac{2}{3}$$

وهذا يعنى أن ربح الوحدة من المتغير (س2) يمكن أن يزيد إلى  $100 \frac{2}{3}$  (أى يزيد ربح الوحدة من (س2) بمقدار  $(\frac{2}{3})$  وتقل إلى (64) دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالى.

**النمط الثالث: تحديد أثر التغير فى المعاملات الفنية لمتغيرات القيود (ثوابت الطرف الأيمن للقيود):**

يوضح كل قيد من قيود نموذج البرمجة الخطية الكميات المتاحة من الموارد بالاضافة إلى الاحتياجات الفنية لكل وحدة من المنتجات التى تستخدم المورد (والتي تعرف بالمعاملات الفنية).

هذا وإن كان من المتعارف عليه أنه قد تم بناء نموذج البرمجة الخطية على افتراض ثبات هذه المعاملات الفنية، إلا أن الواقع العملى يؤكد صعوبة تحقيق هذا الافتراض حيث توجد الكثير من العوامل والأسباب التى تؤدى إلى تغير هذه المعاملات الفنية وعدم ثباتها وذلك مثل التقدم التكنولوجى المستمر، وتناقص القدرة الإنتاجية لوسائل الإنتاج مع مرور الزمن أو التقادم، واستخدام الطرق الإنتاجية المستحدثة، بالاضافة إلى التطور فى مهارات الموارد البشرية العاملة.

ويمكن حساب مدى التغير فى المعامل الفنى (الحدين الأدنى والأعلى) والتي تظل أسعار الظل صالحة فى حدودها وفقاً للقواعد التالية:

1- إذا كان الأمر يتعلق بأحد الموارد غير النادرة أى التى وردت فى جدول الحل الأمثل (عمود المتغيرات الأساسية) فإنه يتم تحديد الحد الأعلى لزيادة المعامل الفنى كما يلى:



أ- إذا كان المنتج أدرج في الحل الأمثل:

الحد الأعلى = كمية المتغير العاطل غير المستخدمة ÷ عدد الوحدات المنتجة من كل منتج.

ب- إذا كان المنتج لم يدرج في الحل الأمثل فإن الحد الأعلى للزيادة = موجب مالا نهاية  $(+\infty)$ .

ويلاحظ أنه في حالة وجود مورد غير نادر فإنه يمكن انقاص المعاملات الفنية إلى مالا نهاية سواء بالنسبة للمنتجات التي وردت أو التي لم ترد ضمن الحل الأمثل، حيث أن ذلك الانقاص سيزيد من كمية المتغير العاطل فقط.

2- إذا كان الأمر يتعلق بأحد الموارد النادرة فإن:

أ- أقصى زيادة للمعامل الفني لمنتج لم يدرج ضمن المتغيرات الأساسية تساوى موجب مالا نهاية  $(+\infty)$  (نظراً لأن أى زيادة لا يترتب عليها تغيير الحل الأمثل).

ب- أقصى نقص في المعامل الفني لمنتج لم يدرج ضمن المتغيرات الأساسية

$$= \frac{\text{معامل المنتج في الصف (م ز - ل ز)}}{\text{سعر ظل المورد}}$$

ج- أقصى زيادة للمعامل الفني لمنتج ورد ضمن المتغيرات الأساسية هي صفر، حيث أن أى زيادة في معامل هذا المنتج سوف تجعل الحل غير ممكناً.

د- أقصى نقص في المعامل الفني لمنتج ورد ضمن المتغيرات الأساسية هي صفر وبالتالي لا يوجد نقص.

مثال (5): فيما يلي جدول الحل الأمثل النهائي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ز			11	6	2	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
6	س2	200	صفر	1	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	صفر
11	س1	300	1	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{3}{2}$	صفر
صفر	ع3	400	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{1}{2}$	1
ل ز		4500	11	6	$\frac{29}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	صفر
م ز - ل ز			صفر	صفر	$-\frac{25}{2}$	1-	$-\frac{3}{2}$	صفر

وكانت القيود الأصلية لهذه المشكلة هي:

$$5 \text{ س1} + 3 \text{ س2} + 7 \text{ س3} \geq 2100$$

$$4 \text{ س1} + 2 \text{ س2} + 5 \text{ س3} \geq 1600$$

$$3 \text{ س1} + 2 \text{ س2} + 4 \text{ س3} \geq 1700$$

$$\text{س1 ، س2 ، س3} \leq \text{صفر}$$

وكانت دالة الهدف هي:

$$\text{عظم (ر)} = 11 \text{ س1} + 6 \text{ س2} + 2 \text{ س3}$$

المطلوب: أوجد مدى التغير في المعامل الفني لكل من (س1 ، س2 ، س3) في القيود الثلاثة.

### الحل

بالنظر إلى جدول الحل الأمثل يتضح ما يلي:

1- القيد الثالث في النموذج الأصلي يتضمن متغير عاطل (ع3) ضمن المتغيرات الأساسية وبالتالي يعبر القيد الثالث عن قيد مورد غير نادر. والقيد الثالث كان كما يلي بعد اضافة المتغير العاطل (ع3).

$$3 \text{ س1} + 2 \text{ س2} + 4 \text{ س3} + \text{ع3} = 1700$$



وطبقاً للحل الأمثل فإن:  $s_1 = 300$ ،  $s_2 = 200$ ،  $s_3 = \text{صفر}$ ،  
 $s_3 = 400$

لتحديد الحدين الأدنى والأعلى لتغير المعاملات الفنية للمورد الثالث (مورد غير نادر) يتم عمل الآتي:

\* الحد الأعلى لزيادة المعامل الفني للمنتجات التي أدرجت ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل

كمية المتغير العاطل ( $s_3$ ) غير المستخدمة

عدد الوحدات المنتجة من كل منتج

أقصى زيادة لمعامل ( $s_1$ ) في القيد الثالث

$$1.3 = 300 \div 400 =$$

أقصى زيادة لمعامل  $s_2$  في القيد الثالث

$$2 = 200 \div 400 =$$

أقصى زيادة لمعامل ( $s_3$ ) في القيد الثالث = موجب مالا نهاية ( $+\infty$ )

(وذلك لأن ( $s_3$ ) متغير غير أساسى).

\* وكذلك يمكن تخفيض المعاملات الفنية لكل من ( $s_1$ ،  $s_2$ ،  $s_3$ ) في القيد الثالث (مورد غير نادر) إلى موجب مالا نهاية ( $+\infty$ ).

2- القيد الأول والثاني يشيران إلى موردين نادرين ويقضى القيدان المذكورين بما يلى:

$$5s_1 + 3s_2 + 7s_3 \geq 2100 \leftarrow \text{القيد الأول}$$

$$4s_1 + 2s_2 + 5s_3 \geq 1600 \leftarrow \text{القيد الثانى}$$

وطبقاً لجدول الحل الأمثل فإن ( $s_1$ )، ( $s_2$ ) متغيرات أساسية وتبلغ أسعار

ظل الوحدة من المورد الأول = (1)، وسعر ظل الوحدة من المورد الثانى =  $(\frac{3}{2})$ .

وبناءً على ذلك نجد أقصى تخفيض وأقصى زيادة بالنسبة للمعاملات الفنية للمنتجين (س1) ، (س2) هي صفر .

وطبقاً لجدول الحل الأمثل فإن (س3) متغير غير أساسي وبالتالي فإن:  
 \* أقصى نقص لمعامل المتغير (س3) من المورد الأول فيحسب وفقاً للمعادلة التالية:

$$= \frac{\text{معامل المنتج (س3) في الصف (م ز - ل ز)}}{\text{سعر ظل المورد الأول}}$$

$$= - \frac{25}{2} \div 1 = - \frac{25}{2}$$

وبذلك يكون الحد الأدنى لمعامل (س3) من المورد الأول هو:

$$7 - \frac{25}{2} = - \frac{11}{2} = (5 \frac{1}{2} -)$$

\* أقصى نقص لمعامل المتغير (س3) من المورد الثاني:

$$= - \frac{25}{2} \div \frac{3}{2} = ( \frac{25}{3} - )$$

وبذلك يكون الحد الأدنى لمعامل (س3) من المورد الثاني هو:

$$5 - \frac{25}{3} = - \frac{10}{3} = (3 \frac{1}{3} -)$$

أما أقصى زيادة لمعامل المتغير (س3) من الموردين الأول والثاني فهي موجب ما لا نهاية (+∞)

وبناءً على ما تقدم تكون الحدود الدنيا والعليا للمعاملات الفنية للمتغير (س3) من الموردين الأول والثاني كما يلي:

$$(5 \frac{1}{2} -) > \text{معامل (س3) من المورد الأول} > (+\infty)$$

$$(3 \frac{1}{3} -) > \text{معامل (س3) من المورد الثاني} > (+\infty)$$



النمط الرابع: تحد أثر اضافة قيد جديد إلى القيود الحالية لنموذج البرمجة الخطية:

قد تستجد بعض الظروف المحيطة بالمنظمة تضطرها إلى اضافة قيد جديد لم يكن وارداً في حساباتها إلى نموذج البرمجة الخطية الأصلي، وكمثال لذلك تغير صفة بعض الموارد المتاحة لهذه المنظمة حيث قد تتحول بعض هذه الموارد من موارد متاحة ومتوفرة بحيث لا تمثل أى قيد على برنامج الإنتاج إلى موارد نادرة تمثل قيوداً على هذا البرنامج ويتطلب الأمر ضرورة التحكم فيها واستغلالها استغلالاً كاملاً.

ويتوقف تأثير اضافة قيد جديد لأى مشكلة على كون القيد الجديد نشط أم غير نشط، حيث يتم تقسيم القيود إلى:

1- قيود نشطة: وهى التى تؤثر فى الحل الأمثل الحالى لنموذج البرمجة الخطية.

2- قيود غير نشطة: وهى التى لا تؤثر فى الحل الأمثل الحالى لنموذج البرمجة الخطية.

ويتم تحديد ما إذا كان القيد الجديد نشطاً أم غير نشط من خلال التعويض فى معادلة القيد محور الدراسة باستخدام نتائج الحل الأمثل (عمود قيم متغيرات الحل) أى الكميات المثلى التى تم التوصل إليها فى برنامج الحل الأمثل الأصلي.

فإذا تحقق الحل الأمثل فى ظل القيد الجديد .∴ القيد الجديد غير نشط.

إذا لم يتحقق الحل الأمثل فى ظل القيد الجديد .∴ القيد الجديد نشط.

فإذا فرض أن الكميات المثلى التى تم التوصل إليها فى برنامج الحل الأمثل الأصلي كانت كما يلى:

$$س_1 = 500 ، س_2 = 600 ، س_3 = 100$$

وكان القيد المطلوب اضافته هو:

$$س_1 + س_2 + س_3 \geq 1800$$

بالتعويض عن الكميات المثلثي في القيد الجديد:

$$1800 \geq 100 + 600 + 500$$

$$1800 \geq 1200$$

∴ القيد الجديد لا يؤثر على الحل الأمثل فهو قيد غير نشط.

أما إذا كان القيد المطلوب اضافته هو:

$$2س_1 + س_2 + 3س_3 \geq 1000$$

بالتعويض بالكميات المثلثي في هذا القيد الجديد

$$= 300 + 600 + 1000 = (100 \times 3) + (600 \times 1) + (500 \times 2)$$

$$1000 < 1900$$

∴ الحل الأمثل يتأثر بالقيد الجديد ويعتبر قيد نشط يجب أن يؤخذ في

الحسبان وبيان أثره على الحل الأمثل.

مثال (6): فيما يلي جدول الحل الأمثل النهائي لأحد مشاكل البرمجة الخطية:

م ر			3	2	4	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	س <sub>3</sub>	1ع	2ع	3ع
4	س <sub>3</sub>	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر
3	س <sub>1</sub>	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر
صفر	3ع	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
ل ر	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر
م-ل ر	صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر	صفر

المطلوب: حدد أثر اضافة القيد الجديد التالي إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج

$$\text{السابق: } 4س_1 + س_2 + 3س_3 \geq 18$$



## الحل

\* تحديد ما إذا كان القيد الجديد نشط أم لا ؟

بالتعويض عن الكميات المثلى التي تم التوصل إليها في برنامج الحل الأمثل الأصلي وهي (س<sub>1</sub> = 2 ، س<sub>2</sub> = صفر ، س<sub>3</sub> = 4 في القيد الجديد وذلك كما يلي:

$$18 \geq (4 \times 3) + \text{صفر} + (2 \times 4)$$

$$18 < 20$$

ونظراً لأن الحل الحالي لا يحقق القيد الجديد بمعنى أن الحل الأمثل يتأثر بالقيد الجديد ويعتبر ذلك القيد قيد نشط. لذا فإن الأمر يتطلب إجراء التعديلات المطلوبة لبيان أثر القيد الجديد على الحل الأمثل الحالي وذلك باتباع الخطوات التالية:

1- تحويل القيد الجديد إلى معادلة (متساوية) بإضافة المتغير العاطل (ع<sub>4</sub>)

$$\text{كما يلي: } 4\text{س}_1 + 2\text{س}_2 + 3\text{س}_3 + \text{ع}_4 = 18$$

2- اضافة صف القيد الجديد إلى جدول الحل الأمثل الأصلي كما يتضح من

الجدول التالي:

م									
3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر	قيم متغيرات الحل	المتغيرات الأساسية	ربح الوحدة
س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	س <sub>3</sub>	ع <sub>1</sub>	ع <sub>2</sub>	ع <sub>3</sub>	ع <sub>4</sub>	4	س <sub>3</sub>	4
صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر	2	س <sub>1</sub>	3
صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	صفر	3	ع <sub>3</sub>	صفر
4	1	3	صفر	صفر	صفر	1	18	ع <sub>4</sub>	صفر
3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	صفر	صفر	22	ل	
صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر	م - ل - ز		

3- بفحص عمودى المتغيرين الأساسيين (س1 ، س3) بهذا الجدول نجد أنهما لا يحققان شرط متجه الوحدة (مصفوفة الوحدة) بسبب وجود بعض المعاملات الفنية الخاصة بالقيد الجديد، ولكي تستبعد هذه المعاملات الفنية من هذين العمودين فإنه يجب أن تصبح قيمة كل منهما = صفر تحت عمودى هذين المتغيرين (س1 ، س3) ، ولتحقيق ذلك فإن الأمر يتطلب ضرب صف المتغير (س1)  $\times 4-$  ، وضرب صف المتغير (س3)  $\times 3-$  ثم يتم جمع ناتج ضرب هذين الصفين على صف المتغير الأساسى العاقل (4ع) ويظهر ذلك من خلال الجدول التالى:

البيان	قيم الحل	س1	س2	س3	1ع	2ع	3ع	4ع
صفر (س1) $\times 4-$	8-	4-	$\frac{4}{3}-$	صفر	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}-$	صفر	صفر
صف (س3) $\times 3-$	12-	صفر	1-	3-	2-	1	صفر	صفر
مجموع الصفين	20-	4-	$\frac{7}{3}-$	3-	$\frac{2}{3}-$	$\frac{5}{3}-$	صفر	صفر
+ صف (4ع)	18	4	1	3	صفر	صفر	صفر	1
القيم الجديدة لصف (4ع)	2-	صفر	$\frac{4}{3}-$	صفر	$\frac{2}{3}-$	$\frac{5}{3}-$	صفر	1

4- وفى ضوء ذلك فإن جدول الحل يظهر بعد اضافة القيم الجديدة لصف المتغير العاقل (4ع) كما يلى:



م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3	ع4
4	س3	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر
3	س1	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر
صفر	ع3	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	صفر
صفر	ع4	2-	صفر	$-\frac{4}{3}$	صفر	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	صفر	1
ل ر	22	3	$\frac{7}{3}$	4	$\frac{5}{3}$	صفر	صفر	صفر	صفر
م ز - ل ر			صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	صفر	صفر

5- يتضح من الجدول السابق أن جميع القيم في الصف الأخير (م ز - ل ر) قيم سالبة أو صفرية وبالتالي فإن جدول الحل السابق هو جدول الحل الأمثل كما هو ولكن توجد قيمة سالبة (-2) في عمود قيم متغيرات الحل أمام المتغير العاقل (ع4) وهذا يشير إلى أن الحل الحالي على الرغم من مثاليته إلا أنه أصبح حل غير ممكن. الأمر الذي يتطلب ضرورة التخلص من هذه القيمة السالبة، ويمكن تحقيق ذلك باستخدام أسلوب الوجه الآخر من السمبلكس وذلك للتغلب على عدم امكانية الحل وذلك باتباع الخطوات التالية:

- أ- تحديد المتغير الذي يترك الحل وهو المتغير صاحب أكبر قيمة أمامها إشارة سالبة في عمود قيم متغيرات الحل وهنا هو المتغير العاقل (ع4).
- ب- تحديد المتغير الذي يدخل الحل ليحل محل المتغير الخارج (ع4) فإن الأمر يتطلب حساب عملية القسمة التالية ثم اختيار المتغير صاحب أقل ناتج قسمة موجب.

القيم السالبة في الصف الأخير (م ز - ل ر) تحت المتغيرات غير الأساسية ÷ المعاملات المقابلة السالبة في صف المتغير الذي يترك الحل (ع4)

\* عند س2 :  $-\frac{1}{3} \div -\frac{4}{3} = \frac{1}{4}$  ← صاحب أقل ناتج قسمة موجب

\* عند ع1 :  $-\frac{5}{3} \div -\frac{2}{3} = \frac{5}{2}$

\* عند ع2 :  $-\frac{2}{3} \div -\frac{5}{3} = \frac{2}{5}$

∴ المتغير (س2) هو المتغير الذى يدخل الحل ويمكن حساب قيم الصف

(س2) فى الجدول الجديد بقسمة قيم الصف (ع4)  $-\frac{4}{3}$

وبالتالى تتمثل قيم (س2) فى الجدول الجديد فى:

$(\frac{3}{2}, \text{صفر}, 1, \text{صفر}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \text{صفر}, -\frac{3}{4})$

\* قيم الصف (س3) فى الجدول الجديد هى :  $(\frac{7}{2}, \text{صفر}, \text{صفر}, 1, \frac{1}{2}, \text{صفر}, \frac{1}{2})$

$-\frac{3}{4}, \text{صفر}, \frac{1}{4})$

\* قيم الصف (س1) فى الجدول الجديد هى :  $(\frac{3}{2}, 1, \text{صفر}, \text{صفر}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

$\text{صفر}, \frac{1}{4})$

\* قيم الصف (ع3) فى الجدول الجديد هى:

$(1, \text{صفر}, \text{صفر}, \text{صفر}, -1, -2, 1, 1)$

وبالتالى يتمثل جدول الحل الجديد فيما يلى:



م ز			3	2	4	صفر	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3	ع4
4	س3	$\frac{7}{2}$	صفر	صفر	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$
3	س1	$\frac{3}{2}$	1	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	صفر	$\frac{1}{4}$
صفر	ع3	1	صفر	صفر	صفر	-1	-2	1	1
2	س2	$\frac{3}{2}$	صفر	1	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	صفر	$-\frac{3}{4}$
	ل ز	$\frac{43}{2}$	3	2	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
	م ر - ل ر		صفر	صفر	صفر	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	صفر	$-\frac{1}{4}$

يمثل الجدول السابق جدول الحل الأمثل، وهو يوضح أنه قد ترتب على اضافة القيد الجديد إلى برنامج الحل الأصلي انخفاض قيمة دالة الهدف (مقدار ربح الحل) حيث بلغت  $\frac{43}{2}$  أى (21.5) فى حين أنها كانت فى الحل الأمثل الأصلي (22) وبالتالي من الأفضل اتخاذ قرار بعدم اضافة القيد الجديد إلى برنامج الحل الأصلي.

## تمارين علي الفصل الخامس

تمرين (1): فيما يلي دالة الهدف والقيود وجدول السمبلكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجي:

$$\text{عظم (ر)} = 3\text{س}_1 + 2\text{س}_2$$

في ظل:

$$4\text{س}_1 + 3\text{س}_2 \geq 12 \quad \leftarrow (\text{المورد الأول})$$

$$4\text{س}_1 + 2\text{س}_2 \geq 8 \quad \leftarrow (\text{المورد الثاني})$$

$$4\text{س}_1 - \text{س}_2 \geq 8 \quad \leftarrow (\text{المورد الثالث})$$

وكان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة كما يلي:

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م			
			س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	2	3
2	س <sub>2</sub>	2	صفر	1	1	صفر
3	س <sub>1</sub>	$\frac{3}{2}$	1	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$
صفر	ع <sub>3</sub>	4	صفر	صفر	1	2
	ل <sub>2</sub>	$\frac{17}{2}$	3	2	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
	م - ل <sub>2</sub>		صفر	صفر	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

المطلوب:

- 1- عمل الصياغة الثنائية فقط لهذه المشكلة.
- 2- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.
- 3- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.



4- إذا زادت قيمة المورد الأول بمقدار (2) وحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

5- إذا زادت قيمة المورد الثاني بمقدار وحدة واحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم امكانية الحل؟

6- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (ع1) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

7- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س2) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.

8- إذا فرض أن السوق لا يستوعب أكثر من (3) وحدات من (س2) فهل سيؤثر هذا القيد الجديد على الحل الأمثل؟ ما هو الحل الجديد؟

9- إذا فرض أن السوق لا يستوعب أكثر من وحدة واحدة من (س1) فهل سيؤثر هذا القيد الجديد على الحل الأمثل؟ ما هو الحل الجديد؟

تمرين (2): فيما يلي دالة الهدف والقيود وجدول السمبلكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجي:

دالة الهدف عظم (ر)  $3س1 + 2س2 + 3س3$   
في ظل:

$$2س1 + 2س2 + 3س3 \geq 2 \quad \leftarrow \text{المورد الأول}$$

$$3س1 + 2س2 + 3س3 \geq 5 \quad \leftarrow \text{المورد الثاني}$$

$$2س1 + 2س2 + 3س3 \geq 6 \quad \leftarrow \text{المورد الثالث}$$

$$س1, س2, س3 \leq \text{صفر}$$

وكان جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة كما يلي:

م ز			3	1	3	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	س3	ع1	ع2	ع3
3	س1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	صفر	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	صفر
3	س3	$\frac{5}{8}$	صفر	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	صفر
صفر	ع3	4	صفر	1	صفر	1-	صفر	1
	ل ز	$\frac{27}{5}$	3	$\frac{12}{5}$	3	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	صفر
	م ز - ل ز		صفر	$-\frac{7}{5}$	صفر	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	صفر

المطلوب:

- 1- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.
- 2- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.
- 3- إذا زادت قيمة المورد الأول بمقدار وحدة واحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم امكانية الحل؟
- 4- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير (ع1) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 5- تحديد مدى التغير فى ربح المتغير (س3) والذى يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 6- تحديد مدى التغير فى المعاملات الفنية لكل من (س1) ، (س2) ، (س3).
- 7- إذا زادت قيمة المورد الثانى بمقدار (2) وحدة فهل يؤدي ذلك إلى عدم امكانية الحل؟
- 8- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق:  $س1 + س2 + س3 \geq 2$



9- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج

$$\text{السابق: } 6 \text{ س} + 1 \text{ س} + 3 \text{ س} + 2 \text{ س} + 3 \text{ س} \geq 5$$

تمرين (3): فيما يلى جدول السمبلكس الأمثل النهائى لإحدى مشكلات البرمجة الخطية:

الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	م			3	2	4	صفر	صفر	صفر
			س <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>	س <sub>3</sub>						
4	س <sub>3</sub>	4	صفر	$\frac{1}{3}$	1	صفر	$\frac{1}{3}$	1	صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر
3	س <sub>1</sub>	2	1	$\frac{1}{3}$	صفر	صفر	$\frac{1}{3}$	صفر	صفر	$\frac{2}{3}$	صفر
صفر	ع <sub>3</sub>	3	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	صفر	$\frac{4}{3}$	صفر	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	ل	22	3	$\frac{7}{3}$	4	صفر	$\frac{7}{3}$	4	صفر	$\frac{2}{3}$	صفر
	م - ل - ر		صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر	$-\frac{1}{3}$	صفر	صفر	$-\frac{2}{3}$	صفر

وكانت دالة الهدف والقيود الأصلية للمشكلة كما يلى:

$$\text{دالة الهدف عظم ( ر ) } = 3 \text{ س} + 1 \text{ س} + 2 \text{ س} + 2 \text{ س} + 4 \text{ س} + 3 \text{ س}$$

فى ظل:

$$10 \geq 3 \text{ س} + 2 \text{ س} + 2 \text{ س} + 1 \text{ س} \leftarrow \text{المورد الأول}$$

$$8 \geq 3 \text{ س} + 2 \text{ س} + 1 \text{ س} \leftarrow \text{المورد الثانى}$$

$$9 \geq 3 \text{ س} + 2 \text{ س} + 1 \text{ س} \leftarrow \text{المورد الثالث}$$

$$1 \text{ س} , 2 \text{ س} , 3 \text{ س} \leq \text{صفر}$$

المطلوب:

1- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.

2- تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

3- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س1) والذي يحافظ علي بقاء الحل الأمثل كما هو.

4- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س2) والذي يحافظ علي بقاء الحل الأمثل كما هو.

5- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س3) والذي يحافظ علي بقاء الحل الأمثل كما هو.

6- تحديد مدى التغير في المعاملات الفنية للمتغير (س2) من المورد الأول والثاني.

7- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالي إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق:  $4س1 + 3س2 + 3س3 \geq 18$

تمرين (4): فيما يلي دالة الهدف والقيود وجدول السمبلكس الأمثل لأحد مشاكل المزيج الإنتاجي:

عظم ( ر )  $= 50س1 + 40س2$   
في ظل:

$3س1 + 5س2 \geq 150$  ← المورد الأول

$20 \geq 2س2$  ← المورد الثاني

$8س1 + 5س2 \geq 300$  ← المورد الثالث

$س1, س2 \geq 0$  صفر



### جدول الحل الأمثل

م	50	40	صفر	صفر	صفر
رياح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم متغيرات الحل	س1	س2	ع3
40	س2	12	صفر	1	$\frac{8}{25}$ -
صفر	ع2	8	صفر	صفر	$\frac{3}{25}$
50	س1	30	1	صفر	$\frac{5}{25}$ -
	ل ز	1980	50	40	$\frac{26}{5}$ -
	م ر - ل ز		صفر	صفر	$\frac{26}{5}$ -

المطلوب:

- 1- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س1) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 2- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س2) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 3- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الأول مع بقاء الحل ممكناً.
- 4- تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة المورد الثالث مع بقاء الحل ممكناً.

تمرين (5): إذا توفر لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{عظم (ر)} = 5\text{س}1 + 3\text{س}2 + 6\text{س}3$$

في ظل:

$$24 \geq 3\text{س}1 + 2\text{س}2 + 3\text{س}3$$

$$20 \geq 2\text{س}1 + 2\text{س}2 + 3\text{س}3$$

$$22 \geq 3\text{س}1 + 2\text{س}2 + 3\text{س}3$$

س1 ، س2 ، س3 ≤ صفر

المطلوب:

- 1- التوصل لبرنامج الحل الأمثل لهذا النموذج.
- 2- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س1) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 3- تحديد مدى التغير في ربح المتغير (س2) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.
- 4- تحديد مدى التغير في كل مورد من الموارد المتاحة بقيود النموذج.
- 5- تحديد مدى التغير في المعاملات الفنية لكل من س1 ، س2 ، س3.
- 6- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالي إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج السابق:  $4س1 + 2س2 + 2س3 \geq 20$

تمرين (6): إذا كان النموذج الرياضى لإحدى مشكلات البرمجة الخطية كما يلى:

عظم (ر)  $= 2س1 + 4س2 + 5س3$   
فى ظل:

$$س1 + س2 + 3س3 \geq 48$$

$$3س1 + س2 + 3س3 \geq 24$$

$$س1 + 3س2 + س3 \geq 32$$

س1 ، س2 ، س3 ≤ صفر

المطلوب:

- 1- التوصل إلى برنامج الحل الأمثل لهذا النموذج.
- 2- تحديد مدى التغير في ربح كل من المتغير (س1) ، (س2) والذي يحافظ على بقاء الحل الأمثل كما هو.



- 3- تحديد مدى التغير في كل مورد من الموارد المتاحة بقيود النموذج.
- 4- تحديد أثر اضافة القيد الجديد التالى إلى برنامج الحل الأمثل للنموذج
- السابق:  $4س_1 + 2س_2 + 2س_3 \geq 40$

## الفصل السادس

### تحليل سلاسل ماركوف

### Markov Chains Analysis

- مقدمة.
- الشروط الواجب توافرها عند استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.
- مستويات التحليل في سلاسل ماركوف.
- تطبيقات سلاسل ماركوف في اتخاذ القرارات الإدارية.
- محاور تطبيق تحليل سلاسل ماركوف.
- استخدام تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة.
- استخدام أسلوب تحليل ماركوف في إدارة الديون (حالة الاحتواء).
- تمارين للتدريب.



## تحليل سلاسل ماركوف

### مقدمة:

تحليل سلاسل ماركوف هي إحدى أساليب بحوث العمليات التي تبحث في تحليل التغيرات الحالية لمتغير عشوائي وذلك بهدف التنبؤ بالتغيرات المستقبلية لهذا المتغير. وفي ضوء ذلك فإن هذا الأسلوب هو أحد الأساليب الرياضية الذي يستخدم لوصف (لتحليل) أي عملية يحدث فيها تغيرات متتالية في مواقف معينة بحكم قوانين الاحتمالات، سواء كانت المتغيرات عشوائية أو على فترات محددة، كمحاولة للتنبؤ بالتحركات أو التغيرات التالية لهذا التغير نفسه.

وفي ضوء ذلك فإن أسلوب تحليل سلاسل ماركوف يعتمد في التحليل على أن سلوك المتغير في فترة مستقبلية إنما يتحدد في ضوء سلوكه في الفترة السابقة مباشرة لهذه الفترة، فإذا أمكن تصوير تحليل للموقف السابق مباشرة فإنه يمكن استخدام هذا التصوير في التوقع الرياض لسلوك المتغير مستقبلاً.

ويتم النظر إلى العمليات التصادفية والتي تعرف بعمليات ماركوف باعتبارها سلسلة من الحالات التي تمر بها ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة، أو يتم النظر إليها باعتبارها سلسلة المواقع التي يمر بها جسم متحرك خلال فترات زمنية مختلفة تعرف بسلاسل ماركوف Markov Chains .

وتقوم سلاسل ماركوف على اعتبار أساسي يتمثل في أن الظاهرة أو الجسم موضع الدراسة ينتقل من حالة إلى حالة أخرى استناداً إلى قوانين احتمالية تعرف بالاحتمالات الانتقالية، وهي تمثل احتمالات الانتقال من حالة إلى أخرى خلال فترة زمنية معينة. كما أنه إذا تم استخدام هذه الاحتمالات الانتقالية في التنبؤ لفترات طويلة في المستقبل، فإننا نكون بصدد ما أطلق عليه وضع التوازن والتي بمقتضاه تتجه الأرقام نحو الاستقرار والثبات.

هذا ويحمل اسم أسلوب تحليل سلاسل ماركوف اسم مبتكر ومخترع هذا الأسلوب وهو العالم " ماركوف " والذي قدمه في عام 1907 ، حيث استخدمه

في البداية لدراسة حركة جزيئات غاز في إناء مغلق والتنبؤ بحركة هذه الجزيئات في المستقبل. وعند استخدام تحليل سلاسل ماركوف يجب:  
أولاً: معرفة الحالة الحالية وهي آخر حدث تم في الفترة السابقة مباشرة.  
ثانياً: معرفة التحركات الاحتمالية والتي هي عبارة عن احتمالات التحرك أو التغير بين الحالات الممكنة.

الشروط الواجب توافرها عند استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف:  
يتطلب استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف توفر بعض الشروط الأساسية والتي تعد بمثابة افتراضات أساسية عند تطبيقه في اتخاذ القرارات، وتتمثل أهم هذه الشروط فيما يلي:

- 1- أن هناك عدد محدد ونهائي من المواقف أو الحالات الممكنة.
- 2- أن سلوك المتغير في المستقبل يتحدد بناءً على سلوكه في الفترة السابقة لهذا المستقبل مباشرة.
- 3- أن الفترة الزمنية للتنبؤ تكون في المدى القصير أو المتوسط.
- 4- أن التغير الذي يحدث في البيانات من فترة إلى أخرى يمكن توفيرها خلال الفترة الزمنية المحددة للتنبؤ.
- 5- أن احتمالات تغير الموقف من وقت لآخر تظل كما هي ثابتة دون تغيير، أي أن احتمالات التغير من الفترة (ن) إلى الفترة (ن + 1) هي نفس الاحتمالات الخاصة بالتغير من الفترة (ن + 1) إلى الفترة (ن + 2)..... وهكذا.....
- 6- أنه يمكن التنبؤ بأي موقف في المستقبل من خلال مصفوفة احتمالات التنقل وأيضاً من خلال المعرفة بالموقف الحالي.
- 7- أن حجم البيانات (أو مكونات النظام) يظل ثابتاً ولا يتغير خلال الفترة الزمنية.

مستويات التحليل في سلاسل ماركوف:



يوجد ثلاثة مستويات أساسية للتحليل في سلاسل ماركوف وتتوقف تلك المستويات على عدد الفترات التي يتم فيها تسجيل سلوك الحدث أو المتغير في الماضي، وتتمثل تلك المستويات فيما يلي:

**المستوى الأول:** مبنى على افتراض أن احتمال الحدث التالي يتوقف تماماً على نتائج الحدث السابق مباشرة (المستهلك الذي اشترى علامة تجارية معينة يعتمد قراره بشراء هذه العلامة مرة أخرى على نتيجة قراره السابق مباشرة).

**المستوى الثاني:** يقوم على افتراض أن احتمال الحدث في الفترة القادمة يعتمد على نتائج الحدثين السابقين له مباشرة. بمعنى افتراض أنه يتم التنبؤ لفترة قادمة من خلال الاعتماد على بيانات فترتين سابقتين لها مباشرة (قرار المستهلك بالشراء في الشهر القادم يتوقف على نتائج شراؤه في الشهرين السابقين).

**المستوى الثالث:** يستند هذا المستوى إلى افتراض أن السلوك المستقبلي للظاهرة يمكن التنبؤ به بدراسة سلوكها في الفترات الزمنية الثلاث السابقة على الفترة موضع التنبؤ. بمعنى أنه يمكن التنبؤ لفترة قادمة اعتماداً على بيانات ثلاث فترات سابقة لها مباشرة.

### تطبيقات سلاسل ماركوف في اتخاذ القرارات الإدارية:

تم استخدام تحليل سلاسل ماركوف في اتخاذ القرارات في العديد من المجالات الإدارية ومنها:

- 1- تحليل نصيب الحصص التسويقية للمنظمات من حيث الزيادة والنقصان، وفحص سلوك العملاء والتنبؤ بولائهم لعلامة تجارية معينة وتحولهم إلى علامة تجارية أخرى خلال الزمن.

2- تحديد مدى تعطل آلة معينة أم لا في المستقبل والآلات التي تتعرض للتوقف بسبب العطل، وتحديد عدد الآلات التي تعمل طبقاً للعمليات الإنتاجية، وكذلك تحديد عدد الآلات التي تحتاج لإجراء صيانة دورية، بالإضافة إلى تحديد تركيبة العمال في قسم إنتاجي معين وذلك في نهاية فترة زمنية محددة.

3- تحرك المواد التي تتحرك على محطات التشغيل في خط الإنتاج وبعاد إرجاعها إلى محطات سابقة من خلال هذا الخط بسبب عيوب التصنيع.

4- مستويات المخزون التي تتعرض للتغير.

5- القرارات المالية الخاصة بتحديد مصادر التمويل في نهاية فترة زمنية معينة.

6- التنبؤ بأعداد القوى العاملة المطلوبة للعمل خلال فترة زمنية معينة.

7- أسلوب التوزيع الحالي المستخدم بواسطة منظمة معينة.

### محاور تطبيق تحليل سلاسل ماركوف:

تبدأ عمليات تحليل سلاسل ماركوف بافتراض أساسي وهو أن النظام الذي نتعامل معه يبدأ بحالة مبدئية أولية مثلاً حالة شركة تمتلك مصنعين نصيب كل منها في السوق 30% ، 70% من مبيعات السوق على التوالي، من الممكن أن يتغير نصيب كل منها بعد عدة أشهر إلى 40% ، 60% على التوالي، وبعد ذلك نحدد احتمال تغير النظام من موقف إلى آخر أو من حالة إلى أخرى، ثم نقوم بجمع هذه الاحتمالات في مصفوفة تسمى مصفوفة احتمالات التنقل التي تبين إمكانية تحويل النظام من نقطة إلى أخرى، وبذلك يمكن التنبؤ بالحالات المستقبلية للنظام.

ويمكن تناول دراسة سلاسل ماركوف من خلال ثلاث محاور وهي:

1- المواقف المتوقعة (المحتملة) واحتمالات حدوثها.

2- مصفوفة احتمالات التنقل.



### 3- التنبؤ باحتمالات الحالات في المستقبل.

وفيما يلي نتناول هذه المحاور الثلاثة بالتفصيل:

#### 1- المواقف المتوقعة (المحتملة) واحتمالات حدوثها:

إن مصطلح الموقف أو الحالة يستخدم لتحديد كافة الظروف الممكنة الخاصة بعملية ما أو نظاماً ما. ونقوم باستخدام الحالات لتحديد الظروف المحتملة لنظام معين، فمثلاً إذا كانت هناك آلة معينة فإنها يمكن أن توجد في أحد موقفين في أى وقت من الأوقات، فهي إما تكون في حالة التشغيل الجيدة أو أن تكون في حالة التشغيل السيئة. وهكذا فإذا كان هناك عميل أمامه ثلاثة متاجر في المنطقة التي يقطنها، فإن هذا العميل سيكون عميلاً لأحد هذه المتاجر في أى فترة زمنية معينة، وبناء عليه فهناك ثلاث مواقف تختص بالمتاجر الثلاثة.

وبعد القيام بتحديد المواقف المحتملة تكون الخطوة التالية هي تحديد احتمال وجود النظام في موقف معين من هذه المواقف، ويتم وضع هذه الاحتمالات فيما يعرف "متجه احتمالات الموقف". فإذا فرضنا أن:  $T = (M)$  = متجه احتمالات الموقف في الزمن  $(M)$  فإن

$$T = (M) = (T_1, T_2, T_3 \dots T_N)$$

حيث  $(N) =$  عدد المواقف

$M_1, M_2, \dots, M_N =$  احتمال وجود النظام في الموقف (1) أو الموقف (2) أو الموقف (3) ... إلى الموقف  $(N)$ .

فمثلاً: إذا كنا نتعامل مع شيء واحد مثل آلة واحدة، فإنه يكون من السهل أن نحدد بدرجة تأكيد تام في أى موقف ستكون هذه الآلة ومعرفة ما إذا كانت هذه الآلة تعمل بشكل جيد أم لا. فإن عرفنا أن الآلة تعمل بشكل جيد الآن فإن متجه احتمالات الموقف يصبح :

$$T = (1) = (1, \text{ صفر})$$

حيث:

ت (1) = متجه مواقف الآله في الفترة الزمنية (1).

ت<sub>1</sub> = 1 = احتمال وجود آلة في الموقف الأول (الآلة تعمل بشكل جيد).

ت<sub>2</sub> = 0 = صفر = احتمال وجود الآلة في الموقف الثاني (الآلة تعمل بشكل سيئ).

أي أن احتمال أن الآلة تعمل بشكل جيد وأن قيمة هذا الموقف الأول = 1  
وأن احتمال أن الآلة تعمل بشكل سيئ وأن قيمة هذا الموقف الثاني = صفر  
أما إذا عرفنا أن الآلة تعمل بشكل سيئ الآن، فإنه متجه احتمالات الموقف  
يصبح:

ت (1) = (صفر ، 1)

حيث: ت (1) = متجه مواقف الآلة في الفترة الزمنية (1) .

ت<sub>1</sub> = 0 = صفر = احتمال وجود الآلة في الموقف الأول (الآلة تعمل بشكل جيد).

ت<sub>2</sub> = 1 = احتمال وجود الآلة في الموقف الثاني (الآلة تعمل بشكل سيئ).

وإذا كنا نتعامل مع حالة فيها أكثر من شيء أو عنصر في وقت واحد، مثلاً  
هناك ثلاث متاجر في منطقة معينة من الإسكندرية، وأن عدد العملاء الذين  
يترددون على هذه المتاجر في أي شهر = 600000 عميل ، ويقدر عدد  
العملاء الذين يشترون من المتجر الأول 300000 عميل ، وسوف نطلق على  
هذه الحالة الموقف (1). بينما يقدر عدد العملاء الذين يشترون من المتجر  
الثاني 180000 عميل وسوف نطلق على هذه الحالة الموقف (2). وأخيراً  
يقدر عدد العملاء الذين يشترون من المتجر الثالث 120000 عميل وسوف  
نطلق على هذه الحالة الموقف (3). وبالتالي فإن احتمالات قيام عميل ما  
بالتسوق في واحد من هذه المتاجر الثلاثة كالتالي:



الموقف (1): المتجر الأول =  $600000 \div 300000 = 50\%$

الموقف (2): المتجر الثاني =  $600000 \div 180000 = 30\%$

الموقف (3): المتجر الثالث =  $600000 \div 120000 = 20\%$

وبالتالى فإنه يمكننا وضع الاحتمالات السابقة فى شكل متجه احتمالات الموقف كما يلى:

ت (1) = ( 0.20 ، 0.30 ، 0.50 )

حيث أن:

ت (1) = متجه احتمالات الموقف للمتاجر الثلاثة فى الفترة الأولى

ت<sub>1</sub> = 0.50 = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الأول (الموقف 1)

ت<sub>2</sub> = 0.30 = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثانى (الموقف 2)

ت<sub>3</sub> = 0.20 = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثالث (الموقف 3)

ويلاحظ أن الاحتمالات التى توجد داخل المتجه هى احتمالات تمثل أيضاً حصة كل متجر فى السوق، حيث يبلغ نصيب المتجر الأول (50%) من السوق، والمتجر الثانى يحصل على (30%) من السوق، والمتجر الثالث يحصل على (20%) من السوق.

وبالتالى فإن الموقف المبدئى فى هذه الحالة يتمثل فى :

ت (1) = ( 0.20 ، 0.30 ، 0.50 )

وتكون الخطوة التالية هى ايجاد مصفوفة احتمالات التنقل حتى يمكن التنبؤ بحصة تلك المتاجر الثلاثة فى المستقبل.

## 2- مصفوفة احتمالات التنقل:

تمثل مصفوفة احتمالات التنقل احتمالات التحرك لمتغير ما داخل عدة بدائل. ومصفوفة احتمالات التنقل هى عبارة عن مجموعة من الاحتمالات

المشروطة لوجود المتغير في موقف ما في المستقبل مع الأخذ في الاعتبار الموقف الحالي الذي يوجد فيه هذا المتغير.

وهذه المصفوفة هي مصفوفة مربعة أي عدد صفوفها = عدد أعمدها، كما أن مجموع الاحتمالات لأي صف في هذه المصفوفة يساوي واحد صحيح.

فمثلاً: إذا افترضنا  $ح د =$  احتمال أن يكون الحدث في الحالة (ج) في المستقبل بشرط وجود الآن في الحالة الحالية (د).

فمثلاً:  $ح 21 =$  احتمال أن يكون الحدث في الحالة الأولى بعد أن كان في الحالة الثانية في الفترة السابقة.

ويمكن تعريف مصفوفة احتمالات التنقل كالتالي:

إذا افترضنا أن  $ح =$  مصفوفة احتمالات التنقل:

$$ح = \begin{bmatrix} ح 11 & ح 12 & ح 13 & \dots & ح 1ن \\ ح 21 & ح 22 & ح 23 & \dots & ح 2ن \\ ح 31 & ح 32 & ح 33 & \dots & ح 3ن \end{bmatrix}$$

فإذا حددنا مصفوفة احتمالات التنقل للمتاجر الثلاثة كما يلي:

المتجر الأول	المتجر الثاني	المتجر الثالث	
المتجر الأول	0.75	0.10	0.15
المتجر الثاني	0.05	0.90	0.05
المتجر الثالث	0.10	0.10	0.80

وباستخدام مفهوم المواقف فإن هذه الاحتمالات يمكن التعبير عنها كما يلي:

يعبر الموقف (1) عن احتمال أن يشتري العميل من المتجر الأول، ويعبر الموقف (2) عن احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثاني، وأخيراً يعبر الموقف (3) عن احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثالث.

• الصف الأول:



$0.75 = H_{11}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الأول بعد كونه

اشتري من المتجر الأول في الفترة السابقة.

$0.10 = H_{12}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثاني بعد كونه اشتري

من المتجر الأول في الفترة السابقة.

$0.15 = H_{13}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثالث بعد كونه

اشتري من المتجر الأول في الفترة السابقة.

لاحظ أيضاً أن مجموع الاحتمالات في الصف الأول = واحد صحيح

• الصف الثاني:

$0.05 = H_{21}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الأول بعد كونه

اشتري من المتجر الثاني في الفترة السابقة.

$0.90 = H_{22}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثاني بعد كونه

اشتري من المتجر الثاني في الفترة السابقة.

$0.05 = H_{23}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثالث بعد كونه

اشتري من المتجر الثاني في الفترة السابقة.

لاحظ أيضاً أن مجموع الاحتمالات في الصف الثاني = واحد صحيح

• الصف الثالث:

$0.10 = H_{31}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الأول بعد كونه اشتري

من المتجر الثالث في الفترة السابقة.

$0.10 = H_{32}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثاني بعد كونه اشتري

من المتجر الثالث في الفترة السابقة.

$0.80 = H_{33}$  = احتمال أن يشتري العميل من المتجر الثالث بعد كونه

اشتري من المتجر الثالث في الفترة السابقة.

لاحظ كذلك أن مجموع الاحتمالات في الصف الثالث = واحد صحيح.

\* وبعد أن تم تحديد متجه احتمالات المواقف، ومصفوفة احتمالات التنقل يمكن التنبؤ باحتمالات المواقف في المستقبل كما يلي:

إذا كنا في أى فترة زمنية ولتكن (ن) فإنه يمكننا حساب احتمالات الموقف في الفترة (ن + 1) باستخدام المعادلة التالية:

$$ت(ن + 1) = ت(ن) ح$$

أما بالنسبة لمثال المتاجر الثلاثة السابقة فإنه يمكننا حساب حصة السوق للمتاجر الثلاثة في الفترة القادمة (الفترة الثانية) باستخدام المعادلة:

$$ت(2) = ت(1) ح$$

حيث ت(1) = متجه احتمالات الموقف (الموقف المبدئى)

$$ت(1) = (0.20, 0.30, 0.50)$$

ح = مصفوفة احتمالات التنقل. وعليه فإن

$$متجه ت(2) = ت(1) \times ح$$

$$= (0.20, 0.30, 0.50) \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.75 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.80 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$0.41 = (0.10 \times 0.20) + (0.05 \times 0.30) + (0.75 \times 0.50)$$

$$0.34 = (0.10 \times 0.20) + (0.90 \times 0.30) + (0.10 \times 0.50)$$

$$0.25 = (0.80 \times 0.20) + (0.05 \times 0.30) + (0.15 \times 0.50)$$

$$\therefore متجه ت(2) = (0.25, 0.34, 0.41)$$

ويلاحظ من النتيجة النهائية للتنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة في الفترة القادمة أن:

\* حصة السوق للمتجر الأول قد انخفضت من (50%) إلى (41%).

\* حصة السوق للمتجر الثانى قد زادت من (30%) إلى (34%).



\* حصة السوق للمتجر الثالث قد زادت من (20%) إلى (25%).

مثال (2): حدد حصة كل متجر من المتاجر الثلاثة في الفترة التي تلي الفترة القادمة مستخدماً نفس بيانات المثال رقم (1).

### الحل

المطلوب هو التنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة في الفترة (ن + 2) أي أننا نريد

حساب متجه ت (3) حيث متجه ت (3) = ت (2) × ح

متجه ت (3) = ت (2) × ح

$$(0.25, 0.34, 0.41) = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.75 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.80 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$0.3495 = (0.10 \times 0.25) + (0.05 \times 0.34) + (0.75 \times 0.41)$$

$$0.372 = (0.10 \times 0.25) + (0.90 \times 0.34) + (0.10 \times 0.41)$$

$$0.2785 = (0.80 \times 0.25) + (0.05 \times 0.34) + (0.15 \times 0.41)$$

$$\therefore \text{متجه ت (3)} = (0.2785, 0.372, 0.3495)$$

وبالاحظ من النتيجة النهائية للتنبؤ بحصص المتاجر الثلاثة في الفترة التي تلي الفترة القادمة أن:

\* حصة السوق للمتجر الأول قد انخفضت من (41%) إلى (34.95%).

\* حصة السوق للمتجر الثاني قد زادت من (34%) إلى (37.2%).

\* حصة السوق للمتجر الثالث قد زادت من (25%) إلى (27.85%).

مثال (3): تنتج ثلاث شركات ثلاثة منتجات متشابهة (أ، ب، ج) ويوضح

الجدول التالي الحركة التفصيلية لتحرك العملاء من استهلاك منتج إلى

استهلاك منتج آخر:

المنتجات	عدد العملاء في أول ديسمبر 2016	العملاء المكتسبين من			العملاء المفقودين إلى			عدد العملاء في يناير 2017
		أ	ب	ج	أ	ب	ج	
أ	1250	-	125	50	-	225	75	1125
ب	3900	225	-	50	125	-	75	3975
ج	1800	75	75	-	50	50	-	1850

فإذا علمت أنه لم يستجد عملاء جدد خلال الفترة، كما أنه لم يترك السوق أحد من العملاء القدامى.

**المطلوب:**

- 1- تفسير البيانات الواردة في الجدول السابق.
- 2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل بين المنتجات الثلاثة.
- 3- التنبؤ بنصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق في أول فبراير (2017).

### الحل

#### 1- تفسير البيانات الواردة بالجدول السابق:

يتضمن هذا التفسير ما يلي:

\* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (أ) (1250) عميل في أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (125) عميل من عملاء المنتج (ب)، و (50) عميل من عملاء المنتج (ج)، كما تحول عن شراء المنتج (أ) (225) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (ب)، و (75) خسرهم لصالح المنتج (ج)، وبالتالي انخفض عدد عملاء المنتج (أ) ليصبح (1125) عميلاً في أول يناير (2017).

$$[1250 + (125 + 50) - (225 + 75)] = 1125 \text{ عميل.}$$

\* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (ب) (3900) عميل في أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (225) عميل



من عملاء المنتج (أ) ، و (50) عميل من عملاء المنتج (ج)، كما تحول عن شراء المنتج (ب) (125) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (أ) ، و (75) عميلاً خسرهم لصالح المنتج (ج)، وبذلك فقد زاد عدد عملاء المنتج (ب) ليصبح (3975) عميلاً في أول يناير (2017)

$$[3900 + (225 + 50) - (125 + 75)] = (3975) \text{ عميل.}$$

\* يبلغ عدد العملاء الذين يشترون المنتج (ج) (1800) عميل في أول ديسمبر (2016)، وقد تحول إلى شراء هذا المنتج كمكسب له (75) عميل من عملاء المنتج (أ)، و (75) من عملاء المنتج (ب)، كما تحول عن شراء المنتج (ج) (50) عميل خسرهم لصالح المنتج (أ)، و (50) عميل خسرهم لصالح المنتج (ب)، وبذلك فقد زاد عدد عملاء المنتج (ج) ليصبح (1850) عميلاً في أول يناير (2017)

$$[1800 + (75 + 75) - (50 + 50)] = (1850) \text{ عميل.}$$

## 2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل:

يجب الأخذ في الحسبان عند اعداد مصفوفة احتمالات التنقل ما يلي:

- \* تمثل الصفوف في مصفوفة احتمالات التنقل احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه واحتمال فقد كل منتج لعملائه إلى المنتجين المتنافسين.
  - \* تمثل الأعمدة في مصفوفة احتمالات التنقل احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه واحتمال كسب كل منتج لعملاء جدد من المنتجين المتنافسين.
- ويتم حساب:

$$\text{احتمال احتفاظ المنتج بعملائه} = \frac{\text{عدد العملاء أول الفترة} - \text{عدد العملاء المفقودين}}{\text{عدد العملاء أول الفترة}}$$

$$\text{احتمال فقد المنتج لعملائه} = \frac{\text{عدد العملاء المفقودين إلى منتج معين}}{\text{عدد العملاء أول الفترة}}$$

(1) حساب احتمال احتفاظ كل منتج بعملائه:

$$0.76 = \frac{950}{1250} = \frac{(75 + 225) - 1250}{1250} = \text{المنتج (أ)}$$

$$0.948 = \frac{3700}{3900} = \frac{(75 + 125) - 3900}{3900} = \text{المنتج (ب)}$$

$$0.944 = \frac{1700}{1800} = \frac{(50 + 50) - 1800}{1800} = \text{المنتج (ج)}$$

(2) احتمال فقد كل منتج لعملائه إلى المنتجين المتنافسين:

\* من المنتج (أ)

$$0.18 = \frac{225}{1250} = \text{إلى المنتج (ب)}$$

$$0.06 = \frac{75}{1250} = \text{إلى المنتج (ج)}$$

\* من المنتج (ب)

$$0.032 = \frac{125}{3900} = \text{إلى المنتج (أ)}$$

$$0.020 = \frac{75}{3900} = \text{إلى المنتج (ج)}$$



\* من المنتج (ج)

$$0.028 = \frac{50}{1800} = \text{إلى المنتج (أ)}$$

$$0.028 = \frac{50}{1800} = \text{إلى المنتج (ب)}$$

وبناء على ما سبق تأخذ مصفوفة احتمالات التنقل الشكل التالي:

	أ	ب	ج
أ	0.76	0.18	0.06
ب	0.032	0.948	0.020
ج	0.028	0.028	0.944

\* تحديد متجة احتمالات المواقف (الموقف المبدئي):

تحديد نصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق في بداية الفترة:

$$\text{نصيب المنتج من السوق} = \frac{\text{عدد عملاء المنتج في بداية الفترة}}{\text{إجمالي عدد العملاء في السوق في بداية الفترة}}$$

إجمالي عدد العملاء في السوق في بداية الفترة =

$$6950 = (1800 + 3900 + 1250) \text{ عميل}$$

$$0.18 = \frac{1250}{6950} = \text{نصيب المنتج (أ)}$$

$$0.56 = \frac{3900}{6950} = \text{نصيب المنتج (ب)}$$

$$\text{نصيب المنتج (ج)} = \frac{1800}{6950} = 0.26$$

∴ متجة احتمالات المواقف (الموقف المبدئي)

$$\text{ت (1)} = (0.26, 0.56, 0.18)$$

3- التنبؤ بنصيب كل منتج من المنتجات الثلاثة من السوق في أول فبراير

(2017) ← يعنى فى الفترة القادمة (ن + 1) أى أننا نريد حساب متجه

$$\text{ت (2) حيث متجه ت (2) = ت (1) } \times \text{ ح}$$

$$\therefore \text{ت (2) = ت (1) } \times \text{ ح}$$

$$(0.26, 0.56, 0.18) = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.18 & 0.76 \\ 0.020 & 0.948 & 0.032 \\ 0.944 & 0.028 & 0.028 \end{bmatrix}$$

$$0.162 = (0.028 \times 0.26) + (0.032 \times 0.56) + (0.76 \times 0.18)$$

$$(0.028 \times 0.26) + (0.948 \times 0.56) + (0.18 \times 0.18)$$

$$0.57056 =$$

$$(0.944 \times 0.26) + (0.020 \times 0.56) + (0.06 \times 0.18)$$

$$0.26744 =$$

$$\therefore \text{متجه ت (2) = (0.26744, 0.57056, 0.162)}$$

\* يلاحظ من التنبؤ بنصيب المنتجات الثلاثة من السوق في أول فبراير

(2017) ما يلى:

\* نصيب المنتج (أ) من السوق قد انخفض من (18%) إلى (16.2%).

\* نصيب المنتج (ب) من السوق قد زاد من (56%) إلى (57.056%).

\* نصيب المنتج (ج) من السوق قد زاد من (26%) إلى (26.744%).



استخدام تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة:

يمكن استخدام تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات قادمة وذلك بافتراض أن هذه الآلات يمكن أن تكون في إحدى حالتين وهما: الحالة الأولى: الآلة تعمل بشكل جيد، والحالة الثانية: الآلة تعمل بشكل سيئ. هذا ويمكن الاستفادة من ذلك في ترشيد قرارات تحديد جدولة العمليات الإنتاجية ومراقبتها، الأمر الذي يؤدي إلى تحقيق أقصى استفادة ممكنة من الطاقة الآلية المتاحة بالمنظمة.

ويوضح المثال التالي كيفية استخدام تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ باحتمالات تشغيل أو تعطل الآلات خلال فترات زمنية قادمة.

مثال (4): بفرض أن أحد الأفراد لديه آلة معينة، وقد لاحظ هذا الفرد أن الآلة تعمل بنسبة (90%) بشكل جيد في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل جيد في الشهر الماضي، كما لاحظ هذا الفرد أن الآلة تعمل بنسبة (70%) بشكل سيئ في الشهر الحالي وذلك إذا كانت تعمل بشكل سيئ في الشهر الماضي.

المطلوب:

1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

2- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

ب- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي.

ج- احتمالات أن تعمل الآلة في الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة احتمالات التنقل كما هي ولم تتغير وذلك باستخدام طريقة الحذف.

## الحل

1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل

جيد في الشهر الحالي:

يمكن تحديد هذا المتجه بافتراض أن  $T(1) =$  متجه الاحتمالات المبدئية حيث:

$T_1 = 1 =$  احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي.

$T_2 = 0 =$  احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي.

∴  $T(1) = (1, 0)$  (صفر)

\* اعداد مصفوفة احتمالات التنقل كما يلي:

الشهر الحالي الشهر الماضي	الآلة تعمل بشكل جيد	الآلة تعمل بشكل سيئ
	الآلة تعمل بشكل جيد	الآلة تعمل بشكل سيئ
الآلة تعمل بشكل جيد	0.90	0.10
الآلة تعمل بشكل سيئ	0.30	0.70

حيث أن: الصف الأول:

$H_1 = 0.90 =$  احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل جيد في الشهر الماضي.

$H_2 = 0.10 =$  احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي بالرغم من أنها كانت تعمل بشكل جيد الشهر الماضي.

لاحظ أن مجموع احتمالات الصف الأول = واحد صحيح.

الصف الثاني:

$H_3 = 0.30 =$  احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد في الشهر الحالي وذلك بالرغم من أنها كانت تعمل بشكل سيئ الشهر الماضي.



ح<sub>22</sub> = 0.70 = احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الشهر الحالي إذا كانت تعمل بشكل سيئ في الشهر الماضي.

لاحظ أيضاً أن مجموع احتمالات الصف الثاني = واحد صحيح.

2- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي:

أولاً: نحدد متجه الاحتمالات المبدئية

ت (1) = (1 ، 0) حيث أننا في حالة تأكد تام أن الآلة ستعمل بشكل جيد في الشهر الحالي.

ثانياً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم أى الفترة (ن + 1):

∴ ت (2) = ت (1) ح

$$= \begin{bmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.70 & 0.30 \end{bmatrix} (1, 0)$$

$$0.90 = (0.30 \times 0 + 0.90 \times 1)$$

$$0.10 = (0.70 \times 0 + 0.10 \times 1)$$

$$\therefore ت (2) = (0.10, 0.90)$$

ثالثاً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن أى فى الفترة (ن + 2)

∴ ت (3) = ت (2) ح

$$= \begin{bmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.70 & 0.30 \end{bmatrix} (0.10, 0.90)$$

$$0.84 = (0.30 \times 0.10) + (0.90 \times 0.90)$$

$$0.16 = (0.70 \times 0.10) + (0.10 \times 0.90)$$

$$\therefore \text{ت (3) = (0.16 ، 0.84)}$$

∴ احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن

إذا كانت الآلة تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي = (84%)

وا احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال شهرين من الآن وذلك إذا كانت تعمل بشكل جيد في الشهر الحالي = (16%).

ب- احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي:

أولاً: نوجد متجه الاحتمالات المبدئية في هذه الحالة:

ت (1) = (صفر ، 1) حيث أننا في حالة تأكد تام أن الآلة ستعمل بشكل سيئ في الشهر الحالي.

ثانياً: نوجد احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم أى في الفترة (ن + 1):

∴ ت (2) = ت (1) ح ← (لاحظ أن مصفوفة احتمالات التنقل كما هي)

$$= \begin{bmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.70 & 0.30 \end{bmatrix} \text{ (صفر ، 1)}$$

$$0.30 = (0.30 \times 1) + (0.90 \times \text{صفر})$$

$$0.70 = (0.70 \times 1) + (0.10 \times \text{صفر})$$

∴ احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال الشهر القادم = (30%)

وا احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال الشهر القادم = (70%)

ج- احتمالات أن تعمل الآلة في الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة احتمالات التنقل كما هي ولم تتغير باستخدام طريقة الحذف:

خطوات الوصول إلى وضع التوازن تتمثل في:



## 1- تطبيق المعادلة التالية:

احتمالات الموقف في الحالة التالية =

احتمالات الموقف في الحالة الحالية  $\times$  مصفوفة احتمالات التنقل.

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية  $\times$  ح

وفي حالة وجود موقفين فقط فإن:

$$(ت_1, ت_2) = (ت_1, ت_2) \times ح$$

أما في حالة وجود ثلاث مواقف فإن:

$$(ت_1, ت_2, ت_3) = (ت_1, ت_2, ت_3) \times ح$$

2- تكوين المعادلات من خلال ضرب متجه الموقف في الحالة الحالية  $\times$

مصفوفة احتمالات التنقل وذلك:

لتكوين معادلتين فقط في حالة وجود موقفين  $(ت_1, ت_2)$

أو تكوين ثلاث معادلات في حالة وجود ثلاث مواقف  $(ت_1, ت_2, ت_3)$

3- اضافة معادلة ثابتة في جميع الحالات تعبر عن أن مجموع الاحتمالات =

واحد صحيح.

في حالة موقفين تكون المعادلة هي:  $ت_1 + ت_2 = 1$

أما في حالة ثلاث مواقف تكون المعادلة هي:  $ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1$

4- استبعاد أي من المعادلات التي تم تكوينها في الخطوة (2)

حتى يتساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل (ولا يتم أبداً استبعاد المعادلة

التي تم تكوينها في الخطوة (3)).

5- نقوم بحل المعادلات المتبقية معاً للوصول إلى قيم المجاهيل بها ومن ثم

الوصول إلى وضع التوازن.

وبالتطبيق علي المثال الحالي نجد أن:

احتمالات أن تعمل الآلة في الأجل الطويل معناه الوصول إلى وضع التوازن لهذه الآلة في الأجل الطويل لمعرفة احتمالات أن تعمل بشكل جيد واحتمالات أن تعمل بشكل سيئ في الأجل الطويل.  
نفترض أن:

ت<sub>1</sub> = احتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد في الأجل الطويل.

ت<sub>2</sub> = احتمالات أن تعمل الآلة بشكل سيئ في الأجل الطويل.

في وضع التوازن تكون:

احتمالات الموقف في الفترة التالية =

احتمالات الموقف في الفترة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل.

ت (متجه التالية) = ت (متجه الحالية) × ح

وحيث أنه يوجد موقفين فقط فإن:

(ت<sub>1</sub> ، ت<sub>2</sub>) = (ت<sub>1</sub> ، ت<sub>2</sub>) × ح

أي أن:

$$\begin{bmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.70 & 0.30 \end{bmatrix} (ت_1 ، ت_2) = (ت_1 ، ت_2)$$

أي أن:

$$ت_1 = 0.90 ت_1 + 0.30 ت_2 \leftarrow (1)$$

$$ت_2 = 0.10 ت_1 + 0.70 ت_2 \leftarrow (2)$$

وحيث أن مجموع الاحتمالات الخاصة بعمل الآلة بشكل جيد وعمل الآلة بشكل سيئ = واحد صحيح.

$$ت_1 + ت_2 = 1 \leftarrow (3)$$

وبإعادة ترتيب المعادلات السابقة نجد أن:

$$- 0.10 ت_1 + 0.30 ت_2 = \text{صفر} \leftarrow (1)$$

$$0.10 ت_1 - 0.30 ت_2 = \text{صفر} \leftarrow (2)$$



$$ت_1 + ت_2 = 1 \leftarrow (3)$$

ونظراً لوجود ثلاث معادلات ومجهولين  $ت_1$ ،  $ت_2$  فإنه يمكن الإكتفاء بحل معادلتين فقط، وتحقيقاً لذلك يتم استبعاد أحد المعادلتين التي تم تكوينها المعادلة (1) أو المعادلة (2)، بفرض إننا استبعدنا المعادلة (2)، نقوم بعد ذلك بحل المعادلتين (1) ، (3) كما يلي:

$$- 0.10 ت_1 + 0.30 ت_2 = \text{صفر}$$

$$\therefore 0.30 ت_2 - 0.10 ت_1 = 0 \quad \text{ومنها } ت_1 = \frac{0.30}{0.10} ت_2$$

$$\text{أي أن } ت_1 = 3 ت_2$$

\* إيجاد قيمة ( $ت_2$ ) بالتعويض عن ( $ت_1$ ) =  $3 ت_2$  في المعادلة (3):

$$3 ت_2 + ت_2 = 1 \quad \therefore 4 ت_2 = 1 \quad \therefore ت_2 = \frac{1}{4} \quad \text{يعنى } (0.25)$$

\* إيجاد قيمة ( $ت_1$ ): بالتعويض عن قيمة ( $ت_2$ ) =  $(0.25)$  في المعادلة رقم (3):

$$ت_1 + 0.25 = 1 \quad \therefore ت_1 = 0.75$$

وبالتالى فإن: وضع التوازن =  $(0.25, 0.75)$  ومعناه

\* احتمال أن تعمل الآلة بشكل جيد فى الأجل الطويل =  $(75\%)$ .

\* احتمال أن تعمل الآلة بشكل سيئ فى الأجل الطويل =  $(25\%)$ .

مثال (5):

إذا علمت أن هناك ثلاثة شركات تتنافس فى السوق، حيث تتمثل حصة كل منهما الحالية من السوق على التوالى فى  $(23\%)$  للشركة (س)،  $(29.5\%)$  للشركة (ص)،  $(47.5\%)$  للشركة (ع)، وفى أى شهر من شهور العام تفقد الشركة (س)  $(18\%)$  من عملائها إلى الشركة (ص) ، و  $(12\%)$  إلى الشركة (ع). ولكن الشركة (ص) تحتفظ بنسبة  $(77\%)$  من عملائها، فى حين أنها تفقد  $(17\%)$  من عملائها إلى الشركة (س). وتفقد الشركة (ع) كل شهر أيضاً

(8%) من عملائها إلى الشركة (س)، و(6%) من عملائها إلى الشركة (ص).

المطلوب:

- 1- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل.
- 2- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث في الفترة القادمة والفترة التي تلي الفترة القادمة.
- 3- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث في وضع التوازن باستخدام طريقة الحذف.

### الحل

1- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل (ح)

$$\begin{matrix} & \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ح} = \text{ص} \\ \text{ع} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

لاحظ أن مجموع احتمالات كل صف لابد أن تساوى واحد صحيح وبالتالي فالمتمم يكون للصف كما هو الحال مثلاً للشركة (س) نجد أنها فقدت (0.18) للشركة (ص) ، (0.12) للشركة (ع) وبالتالي تبلغ نسبة العملاء الذين تحتفظ بهم الشركة (س):  $1 - (0.12 + 0.18) = 0.70$  ..... وهكذا بالنسبة لباقي الشركات (أى باقى صفوف مصفوفة احتمالات التنقل)

2- أولاً: التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث في الفترة القادمة: أى الفترة (ن + 1):

$$ت(2) = ت(1) \times ح$$

ت(1) = متجه الاحتمالات المبدئية وهى (0.23 ، 0.295 ، 0.475)

$$\therefore ت(2) = ت(1) \times ح$$



$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} (0.475, 0.295, 0.23) =$$

$$0.249 = (0.08 \times 0.475) + (0.17 \times 0.295) + (0.70 \times 0.23)$$

$$0.297 = (0.06 \times 0.475) + (0.77 \times 0.295) + (0.18 \times 0.23)$$

$$0.454 = (0.86 \times 0.475) + (0.06 \times 0.295) + (0.12 \times 0.23)$$

∴ ت (2) = (0.454, 0.297, 0.249)

لاحظ أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاث في الفترة القادمة يساوي واحد صحيح.

ثانياً: التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث في الفترة التي تلي الفترة القادمة: المقصود هنا بالفترة (ن + 2) أي المطلوب حساب ت (3):  
ت (3) = ت (2) × ح

$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} (0.454, 0.297, 0.249) =$$

$$0.261 = (0.08 \times 0.454) + (0.17 \times 0.297) + (0.70 \times 0.249)$$

$$0.301 = (0.06 \times 0.454) + (0.77 \times 0.297) + (0.18 \times 0.249)$$

$$0.438 = (0.86 \times 0.454) + (0.06 \times 0.297) + (0.12 \times 0.249)$$

∴ ت (3) = (0.438, 0.301, 0.261)

لاحظ أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاث في أي فترة زمنية يساوي واحد صحيح.

3- التنبؤ بحصص السوق للشركات الثلاث في وضع التوازن باستخدام طريقة الحذف:

يمكن توضيح كيفية الوصول إلى وضع التوازن كما يلي:

### أ- تطبيق المعادلة التالية:

احتمالات الموقف في الحالة التالية =

احتمالات الموقف في الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية × ح

وحيث أنه يوجد ثلاثة مواقف فإن:

$$(ت_1, ت_2, ت_3) = (ت_1, ت_2, ت_3) \times ح$$

$$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.70 \\ 0.06 & 0.77 & 0.17 \\ 0.86 & 0.06 & 0.08 \end{bmatrix} (ت_1, ت_2, ت_3) = (ت_1, ت_2, ت_3)$$

أي أن:

$$ت_1 = 0.70 ت_1 + 0.17 ت_2 + 0.08 ت_3 \leftarrow (1)$$

$$ت_2 = 0.18 ت_1 + 0.77 ت_2 + 0.06 ت_3 \leftarrow (2)$$

$$ت_3 = 0.12 ت_1 + 0.06 ت_2 + 0.86 ت_3 \leftarrow (3)$$

وحيث أن مجموع حصص السوق للشركات الثلاثة يساوي واحد صحيح

∴ يمكن إضافة معادلة رابعة إلى المعادلات السابقة كما يلي:

$$ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1 \leftarrow (4)$$

وبإعادة ترتيب المعادلات السابقة (1)، (2)، (3) وضربها في (100)

$$- 30 ت_1 + 17 ت_2 + 8 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (1)$$

$$18 ت_1 - 23 ت_2 + 6 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (2)$$

$$12 ت_1 + 6 ت_2 - 14 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (3)$$

$$ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1 \leftarrow (4)$$

ونظراً لوجود أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل  $(ت_1, ت_2, ت_3)$



فإنه يمكن استبعاد المعادلة (3) والاكتفاء بحل ثلاث معادلات فقط كما يلي:  
الخطوة الأولى: نضرب المعادلة (1) في (0.6) ونجمعها على المعادلة (2)  
كما يلي:

$$- 18 \text{ ت}_1 + 10.2 \text{ ت}_2 + 4.8 \text{ ت}_3 = \text{صفر}$$

$$\underline{18 \text{ ت}_1 - 23 \text{ ت}_2 + 6 \text{ ت}_3 = \text{صفر}}$$

$$- 12.8 \text{ ت}_2 + 10.8 \text{ ت}_3 = \text{صفر}$$

$$\therefore 10.8 \text{ ت}_3 = 12.8 \text{ ت}_2$$

$$\therefore 10.8 \div 12.8 \text{ ت}_2 = \text{ت}_3$$

$$\therefore \text{ت}_3 = \frac{12.8}{10.8} \text{ ت}_2 \therefore \text{ت}_3 = 1.1851852 \text{ ت}_2$$

الخطوة الثانية: نضرب المعادلة (1) في (-0.75) ونجمعها على المعادلة (2) كما يلي:

$$22.5 \text{ ت}_1 - 12.75 \text{ ت}_2 - 6 \text{ ت}_3 = \text{صفر}$$

$$\underline{18 \text{ ت}_1 - 23 \text{ ت}_2 + 6 \text{ ت}_3 = \text{صفر}}$$

$$40.5 \text{ ت}_1 - 35.75 \text{ ت}_2 = \text{صفر}$$

$$\therefore 40.5 \text{ ت}_1 = 35.75 \text{ ت}_2$$

$$\therefore \text{ت}_1 = \frac{35.75}{40.5} \text{ ت}_2$$

$$\therefore \text{ت}_1 = 0.882716 \text{ ت}_2$$

الخطوة الثالثة: يتم تحديد قيمة (ت<sub>2</sub>) بالتعويض عن قيمة (ت<sub>1</sub>) ، (ت<sub>3</sub>)

في المعادلة رقم (4):  $\text{ت}_1 + \text{ت}_2 + \text{ت}_3 = 1$  كما يلي:

$$0.882716 \text{ ت}_2 + \text{ت}_2 + 1.1851852 \text{ ت}_2 = 1$$

$$\therefore 3.0679012 \text{ ت}_2 = 1$$

$$\therefore \text{ت}_2 = 0.3259557$$

إيجاد قيمة (ت<sub>1</sub>) كما يلي:

$$ت_1 = 0.882716$$

$$ت_1 = 0.3259557 \times 0.882716$$

$$ت_1 = 0.2877263$$

ايجاد قيمة (ت<sub>3</sub>) كما يلي:

$$ت_3 = 1.1851852 \times ت_2$$

$$ت_3 = 0.3259557 \times 1.1851852$$

$$ت_3 = 0.3863178$$

وفي ضوء ذلك فإن حصص الشركات الثلاث في وضع التوازن هي:

$$الشركة (س) = ت_1 = 0.2877263 \simeq 0.288$$

$$الشركة (ص) = ت_2 = 0.3259557 \simeq 0.326$$

$$الشركة (ع) = ت_3 = 0.3863178 \simeq 0.386$$

لاحظ أن مجموع حصص الشركات الثلاث في وضع التوازن يساوى واحد صحيح.

مثال (6): إذا توفرت لديك مصفوفة احتمالات التنقل لعدد من العملاء بين

ثلاث شركات متنافسة في السوق وهي (س) ، (ص) ، (ع):

$$ح = \begin{matrix} & \begin{matrix} س & ص & ع \end{matrix} \\ \begin{matrix} س \\ ص \\ ع \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 & 0.65 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.80 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

وكانت حصص الشركات الثلاث من السوق هي:

$$(0.25 , 0.35 , 0.40) \text{ على التوالي.}$$

المطلوب: التنبؤ بحصص الشركات الثلاث من السوق في وضع التوازن باستخدام طريقة المحددات.

الحل



\* يمكن توضيح كيفية الوصول لوضع التوازن باستخدام طريقة المحددات كما يلي:

\* عند وضع التوازن يكون

متجه الحالة التالية = متجه الحالة الحالية × مصفوفة احتمالات التنقل

$$(ت_1, ت_2, ت_3) = (ت_1, ت_2, ت_3) \times ح$$

$$\begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 & 0.65 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.80 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} (ت_1, ت_2, ت_3) = (ت_1, ت_2, ت_3)$$

أى أن:

$$ت_1 = 0.65 ت_1 + 0.05 ت_2 + 0.10 ت_3 \leftarrow (1)$$

$$ت_2 = 0.20 ت_1 + 0.90 ت_2 + 0.10 ت_3 \leftarrow (2)$$

$$ت_3 = 0.15 ت_1 + 0.05 ت_2 + 0.80 ت_3 \leftarrow (3)$$

$$ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1 \leftarrow (4)$$

بإعادة ترتيب المعادلات السابقة نجد أن:

$$-0.35 ت_1 + 0.05 ت_2 + 0.10 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (1)$$

$$-0.20 ت_1 + 0.10 ت_2 - 0.10 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (2)$$

$$0.15 ت_1 - 0.05 ت_2 + 0.20 ت_3 = \text{صفر} \leftarrow (3)$$

$$ت_1 + ت_2 + ت_3 = 1 \leftarrow (4)$$

نقوم بحذف المعادلة رقم (1) وحل باقى المعادلات باستخدام طريقة المحددات

للوصول إلى قيم كل من (ت<sub>1</sub>) ، (ت<sub>2</sub>) ، (ت<sub>3</sub>) كما يلي:

\* يتم إظهار المعادلات (2) ، (3) ، (4) في المصفوفة التالية:

$$\begin{matrix} & \text{ت}_1 & \text{ت}_2 & \text{ت}_3 \\ \begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \\ 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0.10 & 0.10 - & 0.20 \\ 0.20 - & 0.05 & 0.15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

يتم ايجاد قيم كل من (ت<sub>1</sub>) ، (ت<sub>2</sub>) ، (ت<sub>3</sub>) باستخدام طريقة المحددات كما يلي:

أولاً: ايجاد المحدد العام للمصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20 - & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20 - & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.20$$

$$\begin{aligned} & 0.20 - ) - (1 \times 0.15) ] 0.10 + [(1 \times 0.20 - ) - (1 \times 0.05) ] 0.20 = \\ & [(1 \times 0.05) - (1 \times 0.15) ] 0.10 + [(1 \times \\ & (0.10 \times 0.10) + (0.35 \times 0.10) + (0.25 \times 0.20) = \\ & 0.095 = 0.01 + 0.035 + 0.05 \end{aligned}$$

\* ايجاد محدد (ت<sub>1</sub>) كما يلي:

$$\begin{vmatrix} 0.10 & 0.10 - & \text{صفر} \\ 0.20 - & 0.05 & \text{صفر} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.05 & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20 - & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20 - & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{صفر} =$$



$$\begin{aligned}
&= \text{صفر} - (1 \times 0.05) - (1 \times 0.20 -) + 0.10 + [(1 \times 0.20 -) - (1 \times \text{صفر})] \\
&= \text{صفر} + (0.20 \times 0.10) + (0.05 - \times 0.10) \\
&= \text{صفر} + 0.02 - 0.005 = 0.015
\end{aligned}$$

$$0.158 = \frac{0.015}{0.095} = \frac{\text{قيمة محدد (ت}_1\text{)}}{\text{المحدد العام للمصفوفة}} = \text{قيمة (ت}_1\text{)}$$

\* إيجاد محدد (ت<sub>2</sub>) كما يلي:

0.10	صفر	0.20
0.20-	صفر	0.15
1	1	1

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} 0.20- & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{صفر} + \begin{bmatrix} 0.20- & \text{صفر} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.20-$$

$$\begin{aligned}
&= 0.20 - (1 \times 0.15) + \text{صفر} + [(1 \times 0.20 -) - (1 \times \text{صفر})] 0.20 \\
&= [(1 \times \text{صفر}) - (1 \times 0.15)] 0.10 + [(1 \times 0.20 -) - (1 \times \text{صفر})] \\
&= (0.20 \times 0.20) + (0.35 \times \text{صفر}) + (0.15 \times 0.10) \\
&= 0.04 + \text{صفر} + 0.015 = 0.055
\end{aligned}$$

$$0.579 = \frac{0.055}{0.095} = \text{قيمة (ت}_2\text{)}$$

\* إيجاد محدد (ت<sub>3</sub>) كما يلي:

صفر	0.10-	0.20
صفر	0.05	0.15
1	1	1

$$\begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{صفر} + \begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.15 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.10 + \begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.05 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 0.20 =$$

$$= 0.20 [(1 \times 0.05) - (1 \times \text{صفر})] + 0.10 [(1 \times 0.15) - (1 \times \text{صفر})] \times$$

$$+ [(1 \times 0.05) - (1 \times 0.15)] \text{صفر} =$$

$$= 0.20 (0.05 - 0) + 0.10 (0.15 - 0) + (0 - 0.10) \text{صفر} =$$

$$= 0.01 + 0.015 + 0 = 0.025 = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{قيمة (ت}_3) = \frac{0.025}{0.095} = 0.263$$

وبالتالى فإن:

$$\text{ت}_1 = 0.158$$

$$\text{ت}_2 = 0.579$$

$$\text{ت}_3 = 0.263$$

وبالتالى فإن حصص الشركات الثلاث من السوق فى وضع التوازن هى:

$$\text{* حصة الشركة (س) = ت}_1 = 0.158$$

$$\text{* حصة الشركة (ص) = ت}_2 = 0.579$$

$$\text{* حصة الشركة (ع) = ت}_3 = 0.263$$

ملحوظة: بحل المعادلات (2) ، (3) ، (4) باستخدام طريقة الحذف ستصل

إلى نفس قيم (ت<sub>1</sub> ، ت<sub>2</sub> ، ت<sub>3</sub>) التى توصلنا إليها باستخدام طريقة المحددات

(حاول عزيزى القارئ أن تتأكد من ذلك بنفسك).

استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف فى إدارة الديون (حالة الاحتواء):



تعتبر إدارة الديون من أشهر التطبيقات الخاصة بحالة الاحتواء Absorbing State ويقصد بهذه الحالة أن النظام يوجد في حالة معينة ويصبح متشبعاً بها بحيث لا يمكنه الانتقال من هذه الحالة إلى حالة أخرى في المستقبل.

وكمثال لحالة الاحتواء إذا قام عميل بدفع قيمة ما اشتراه من بضاعة خلال شهر يناير، فإنه من المستحيل أن يكون عليه دين عن نفس البضاعة التي اشتراها في هذا الشهر خلال شهر فبراير القادم. وكذلك إذا امتنع أحد العملاء عن سداد ديونه لمدة طويلة للمنظمة بعد تاريخ استحقاقها، وإذا تأكدت المنظمة من عدم استرداد هذا المبلغ، فإنها تقوم بعلاج هذا الدين من الناحية الدفترية باعتباره ديوناً معدومة وبالتالي يظل العميل في هذه الحالة إلى الأبد.

فالمنظمة تقوم بتصنيف أوراق القبض عادة إلى عدة مجموعات أو مواقف (حالات) وذلك وفقاً لأقدمية هذه الأوراق وتجاوزها لتاريخ الاستحقاق، أي وفقاً لتاريخ استحقاقها أو لأقدمية تجاوزها لهذا التاريخ.

وتحدد عدد المجموعات (المواقف) وفقاً لسياسة الشركة ذاتها، وتمثل المجموعات (المواقف) النمطية المجموعات التالية:

الموقف الأول (ت1): أوراق القبض التي تم دفعها بالكامل.

الموقف الثاني (ت2): ديون معدومة، تجاوزت تاريخ استحقاقها أكثر من أربعة شهور.

الموقف الثالث (ت3): ديون تجاوزت تاريخ استحقاقها بأقل من شهر.

الموقف الرابع (ت4): ديون تجاوزت تاريخ استحقاقها مدة من شهر إلى أربعة شهور.

ومما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أن احتمال وجود أى عميل في حالة الاحتواء لابد وأن يساوى الواحد الصحيح. بينما في الحالات العادية هذا الاحتمال يتوقف على وجود أو عدم وجود العميل في كل حالة من هذه الحالات.

ويمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في إدارة ديون المنظمة من خلال المثال التالي:

مثال(6): يوضح الجدول التالي مصفوفة احتمالات التنقل الخاصة بسياسة تحصيل أوراق القبض بشركة النور للأوراق المالية وذلك خلال الشهر القادم:

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة	الحالة الرابعة	الشهر الحالي / الشهر القادم	
				مدفوع بالكامل	ديون متجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور
الحالة الأولى	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر	صفر
الحالة الثانية	ديون معدومة	صفر	1	صفر	صفر
الحالة الثالثة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	0.5	صفر	0.3	0.2
الحالة الرابعة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق 1-4 شهور	0.6	0.1	0.2	0.1

فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء في المجموعات الأربعة هي: 0.45 ، 0.10 ، 0.20 ، 0.25 على التوالي. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للحالة الثالثة = 8000 جنيه، وبالنسبة للحالة الرابعة = 12000 جنيه.

المطلوب: استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في:

- 1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم.
- 2- تحديد مقدار المبلغ الذي سيتم دفعه في الحالتين الثالثة والرابعة، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟

الحل



1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم:  
 ت(1) = متجه الاحتمالات المبدئية (النسبة الحالية للعملاء في المجموعات  
 الأربعة وهي = (0.25 ، 0.20 ، 0.10 ، 0.45)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \text{صفر} & \text{صفر} \\ 0.5 & \text{صفر} & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

للتنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم أى  
 خلال الفترة (ن + 1)  
 ∴ ت(2) = ت(1) ح

$$= (0.25 , 0.20 , 0.10 , 0.45) - \begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \text{صفر} & \text{صفر} \\ 0.5 & \text{صفر} & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= (0.065 , 0.11 , 0.125 , 0.70)$$

أى أن النسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم هي:  
 نسبة الديون المدفوعة بالكامل = 0.70  
 نسبة الديون المعدومة = 0.125

نسبة الديون التى تجاوزت تاريخ استحقاقها بأقل من شهر = 0.11  
 نسبة الديون التى تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور = 0.065

2- تحديد مقدار المبلغ الذى سيتم دفعه في الحالتين الثالثة والرابعة:  
 يتم ذلك عن طريق الخطوات التالية:

- تقسيم مصفوفة احتمالات التتقل إلى أربعة أجزاء كالتالي:

(ب)		(أ)	
صفر	صفر	صفر	1
صفر	صفر	1	صفر
(د)		(ج)	
0.2	0.3	صفر	0.5
0.1	0.2	0.1	0.6

وبالتالي نحصل على المصفوفات الأربعة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{ب} , \quad \begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \text{د} , \quad \begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} = \text{ج}$$

\* إيجاد المصفوفة الأساسية (ص)

ويمكن حساب المصفوفة الأساسية عن طريق استخدام المعادلة التالية:

$$\text{ص} = (\text{أ} - \text{د})^{-1}$$

وهذا يعنى أننا نقوم بطرح المصفوفة (د) من المصفوفة (أ) ثم نأخذ مقلوب

النتائج الخاصة بالطرح، فالعلامة (-1) تعنى مقلوب المصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0.2- & 0.7- \\ 0.9 & 0.2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{bmatrix} = \text{ص}$$



ثم إيجاد مقلوب المصفوفة:

$$^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 & -0.7 \\ 0.9 & -0.2 \end{bmatrix}$$

وذلك عن طريق اتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إيجاد محدد المصفوفة:

محدد المصفوفة = [حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي - حاصل ضرب عناصر القطر العكسي]

$$0.59 = [(0.2 \times -0.2) - (0.9 \times -0.7)] =$$

الخطوة الثانية: إيجاد مصفوفة المرافقات: وذلك عن طريق تبديل أرقام القطر الرئيسي والعكسي وإلغاء الإشارات السالبة في القطر العكسي:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد المصفوفة المبدلة: عن طريق تحويل أرقام الصف الأول في مصفوفة المرافقات إلى عمود أول، والصف الثاني إلى عمود ثاني .....

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} = \text{المصفوفة المبدلة}$$

الخطوة الرابعة: إيجاد مقلوب المصفوفة كما يلي:

$$\text{مقلوب المصفوفة} = \frac{1}{\text{محدد المصفوفة}} \times \text{المصفوفة المبدلة}$$

$$\begin{bmatrix} 0.34 & 1.53 \\ 1.19 & 0.34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \frac{1}{0.59} =$$

ويمثل هذا المقلوب "المصفوفة الأساسية (ص)"

$$\begin{bmatrix} 0.34 & 1.53 \\ 1.19 & 0.34 \end{bmatrix} = \text{ص}$$

\* ضرب المصفوفة الأساسية (ص) × المصفوفة (ج)

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.34 & 1.53 \\ 1.19 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (0.5 \times 1.53) & (0.5 \times 0.34) \\ (0.1 \times 1.53) + (0.6 \times 0.34) & (0.1 \times 0.34) + (0.6 \times 0.34) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.97 \\ 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} = (\text{ج}) \times (\text{ص})$$

ويمكن حساب مقدار المبالغ المدفوعة، ومقدار الديون المعدومة في الحالتين الثالثة والرابعة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.97 \\ 0.12 & 0.88 \end{bmatrix} (12000, 8000)$$

ومن ذلك نجد أن:



\* مقدار المبالغ المدفوعة في الحالتين الثالثة والرابعة

$$(0.88 \times 12000) + (0.97 \times 8000) =$$

$$= 10560 + 7760 = 18320 \text{ جنيه}$$

\* مقدار الديون المدومة في الحالتين الثالثة والرابعة

$$(0.12 \times 12000) + (0.03 \times 8000) =$$

$$= 1440 + 240 = 1680 \text{ جنيه}$$

ومعنى ذلك أن مبلغ قدرة (20000) ( فيه 8000 في الحالة التي تجاوزت تاريخ استحقاق من أوراق القبض أقل من شهر، ومبلغ 12000 في الحالة التي تجاوزت تاريخ استحقاقها من شهر إلى أربعة شهور) سوف يدفع منه (18320) جنيه، بينما يمثل المبلغ الباقي وهو (1680) جنيه ديوناً مدومة بالنسبة للشركة.

## تمارين علي الفصل السادس

تمرين(1): بفرض أنه هناك منطقة بها 200000 عميل، ويوجد في هذه المنطقة (3) متاجر ويحصل المتجر الأول على 80000 عميل، والمتجر الثاني يحصل على 60000 عميل، أما المتجر الثالث فيحصل على 60000 عميل.

بفرض أن البيانات السابقة أوضحت أن (10%) من عملاء المتجر الأول ينتقلوا إلى المتجر الثاني، و(10%) آخرين ينتقلوا إلى المتجر الثالث. كما أوضحت البيانات أن (10%) من عملاء المتجر الثاني ينتقلوا إلى المتجر الأول، و(20%) آخرين ينتقلوا إلى المتجر الثالث. وأخيراً أوضحت البيانات أن (20%) من عملاء المتجر الثالث ينتقلوا إلى المتجر الأول، و(20%) آخرين ينتقلوا إلى المتجر الثاني.

**المطلوب:**

- 1- اعداد متجه الاحتمالات المبدئية في هذه الحالة.
- 2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل بين المتاجر الثلاثة.
- 3- التنبؤ بحصة كل متجر من العملاء في الفترة القادمة باستخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.
- 4- التنبؤ بحصة كل متجر من العملاء في الفترة التي تلي الفترة القادمة باستخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف.

تمرين (2): بفرض أن "أحمد محمود" لديه سيارة، وفي كل يوم لا يعرف إذا كانت تلك السيارة سوف تعمل أم لا. (80%) من الوقت إنها سوف تعمل اليوم إذا كانت قد بدأت العمل في اليوم السابق مباشرة، (90%) من الوقت لن تعمل اليوم إذا كانت لم تعمل في اليوم السابق مباشرة.

**المطلوب:**



1- تحديد متجه الاحتمالات المبدئية وذلك إذا علمت أن السيارة قد بدأت العمل اليوم.

2- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل لتلك السيارة.

3- استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ بكل من:

أ- احتمالات أن تبدأ السيارة العمل غداً إذا كانت قد بدأت العمل اليوم.

ب- احتمالات عدم عمل السيارة غداً إذا كانت لم تعمل اليوم.

ج- احتمالات أن تعمل السيارة في الأجل الطويل وذلك لو بقيت مصفوفة

احتمالات التنقل كما هي ولم تتغير وذلك باستخدام طريقة الحذف.

تمرين (3): إذا كان هناك ثلاثة شركات تتنافس في السوق حيث تتمثل حصة كل منهما الحالية من السوق على التوالي في (25%) للشركة (أ) ، (35%) للشركة (ب) ، (40%) للشركة (ج). وفي أى شهر من شهور العام تفقد الشركة (أ) (10%) من عملائها إلى الشركة (ب)، و(10%) إلى الشركة (ج). ولكن الشركة (ب) لديها القدرة على الاحتفاظ بنسبة (90%) من عملائها على مدار العام، في حين أنها تفقد (7%) من عملائها إلى الشركة (أ). وتفقد الشركة (ج) (8%) من عملائها إلى الشركة (أ) ، و(7%) من عملائها إلى الشركة (ب).

المطلوب:

1- اعداد مصفوفة احتمالات التنقل لتلك المشكلة.

2- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث في الشهر القادم.

3- التنبؤ بحصص السوق لكل شركة من الشركات الثلاث في وضع التوازن باستخدام طريقة الحذف.

تمرين (4): تمتلك شركة "ريماس" آلة معينة، وقد لاحظت الشركة أن الآلة تعمل بنسبة (80%) بشكل جيد هذا الشهر إذا كانت تعمل بشكل جيد في

الشهر الماضي، كما لاحظت الشركة أيضاً أن الآلة تعمل بنسبة (60%) بشكل سيئ هذا الشهر وذلك إذا كانت تعمل بشكل سيئ في الشهر الماضي.  
المطلوب:

1- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة بشكل جيد خلال شهرين من الآن وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل جيد هذا الشهر.

2- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة بشكل سيئ خلال الشهر القادم وذلك إذا علمت أن الآلة تعمل بشكل سيئ هذا الشهر.

3- التنبؤ باحتمالات أن تعمل الآلة في الأجل الطويل وذلك في حالة عدم تغير مصفوفة احتمالات التنقل.

تمرين (5): بفرض أن الجدول التالي يعبر عن احتمالات التنقل في أوراق القبض للشهر القادم لإحدى الشركات:

الشهر الحالي \ الشهر القادم		مجموعة (1)	مجموعة (2)	مجموعة (3)	مجموعة (4)
	الشهر القادم	مدفوع بالكامل	ديون معومة	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور
	مجموعة (1)	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر
	مجموعة (2)	ديون معومة	صفر	1	صفر
	مجموعة (3)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق بأقل من شهر	0.7	0.2	صفر
	مجموعة (4)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-4 شهور	0.5	0.2	0.1



فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء في المجموعات الأربعة هي : 0.60 ، 0.20 ، 0.10 ، 0.10 على التوالي. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للمجموعة (3) = 25000 جنيه، وبالنسبة للمجموعة (4) = 50000 جنيه.

**المطلوب:**

- 1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم.
- 2- تحديد مقدار المبلغ الذي سيتم دفعة في المجموعتين (3) ، (4)، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟

**تمرين(6):** بفرض أن الجدول التالي يعبر عن احتمالات التنقل الخاصة بسياسة تحصيل الديون بشركة "النهار السعيد" التجارية وذلك في أول شهر يناير 2016:

الشهر الحالي	الشهر القادم	حالة (1)	حالة (2)	حالة (3)	حالة (4)
		مدفوع بالكامل	ديون معدومة	ديون تجاوزت بأقل من شهر	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-5 شهور
حالة (1)	مدفوع بالكامل	1	صفر	صفر	صفر
حالة (2)	ديون معدومة	صفر	1	صفر	صفر
حالة (3)	ديون تجاوزت بأقل من شهر	0.7	صفر	0.2	0.1
حالة (4)	ديون تجاوزت تاريخ الاستحقاق من 1-5 شهور	0.4	0.2	0.2	0.2

فإذا علمت أن النسبة الحالية للعملاء في الحالات الأربعة هي : 0.40 ، 0.10 ، 0.30 ، 0.20 على التوالي. وأن قيمة أوراق القبض بالنسبة للحالة (3) = 4000 جنيه، وبالنسبة للحالة (4) = 10000 جنيه.

## المطلوب:

- 1- التنبؤ بالنسب المتوقعة لحالات سداد الديون المختلفة في الشهر القادم.
  - 2- تحديد مقدار المبلغ الذي سيتم دفعه في الحالتين (3) ، (4)، وما هو مقدار الديون المعدومة منها؟
- تمرين (7): يقوم "البنك الأهلي المصري" كل عام بإجراء مجموعة من الاختبارات وذلك لاختبار مدى المام المتقدمين للعمل في البنك بالحاسب الآلى. ويقوم البنك بتصنيف نتائج هذه الاختبارات إلى (4) مجموعات (مواقف) كما يلي:
- المجموعة الأولى: اجتاز كل الاختبارات ويعفى المتقدم من الدورة التدريبية التي يقدمها البنك.
- المجموع الثانية: عدم اجتاز كل الاختبارات ولا بد من أخذ الدورة التدريبية التي يقدمها البنك.
- المجموعة الثالثة: عدم اجتياز الاختبار في أول محاولة.
- المجموعة الرابعة: عدم اجتياز الاختبار في ثانى محاولة.
- وقد لاحظ قسم الاختيار والتعيين المشرف على الاختبارات وجود مصفوفة احتمالات التتقل التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \text{صفر} & \text{صفر} \\ 0.6 & \text{صفر} & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$



فإذا علمت أن عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا الاختبار في أول محاولة (المجموعة الثالثة) = 2000 متقدم، وأن عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا الاختبار في ثاني محاولة = 5000 متقدم.

**المطلوب:** استخدام أسلوب تحليل سلاسل ماركوف في التنبؤ بكل من:

1- عدد المتقدمين الذين اجتازوا كل الاختبارات ويعفوا من الدورة التدريبية التي يقدمها البنك.

2- عدد المتقدمين الذين لم يجتازوا كل الاختبارات ولا بد من أخذهم الدورة التدريبية التي يقدمها البنك.

## الفصل السابع

### نظرية القرارات

### Decisions Theory

- مقدمة.
- مفهوم نظرية القرارات.
- عناصر عملية صنع واتخاذ القرارات.
- خطوات تحليل القرار.
- بيئة اتخاذ القرار:
- أولاً: اتخاذ القرار في ظل حالة التأكد التام.
- ثانياً: اتخاذ القرار في ظل حالة عدم التأكد.
- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).
- 3- معيار الاحتمالات المتساوية.
- 4- معيار الواقعية.
- 5- معيار الأسف (الندم) (معيار أدنى الأقصى).
- ثالثاً: اتخاذ القرار في ظل حالة الخطر:
- القيمة النقدية المتوقعة (EMV).
- استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة في حالة الأرباح (طريقة القيمة أو العائد المتوقع).
- استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة في حالة الخسائر (طريقة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة).
- القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة.
- تحليل الحساسية.
- شجرة القرار Decision Tree
- تمارين للتدريب.



## نظرية القرارات

### مقدمة:

تعتبر عملية اتخاذ القرارات هي جوهر العملية الإدارية، وتتميز معظم القرارات التي يواجهها المديرون بأنها تتم في ظروف معقدة وتتسم بعدم التأكد. وتعرف عملية اتخاذ القرار بأنها العملية التي يتم بمقتضاها اختيار بديل واحد أو أكثر من بين مجموعة البدائل المتاحة لحل مشكلة معينة لتحقيق هدف أو مجموعة من الأهداف في ضوء معطيات كل من البيئة الداخلية والبيئة الخارجية والموارد المتاحة للمنظمة.

ونظراً لظروف عدم التأكد فلا يمكن التأكد من نتائج القرار الذي تم اتخاذه، ومن ثم فلا بد من تحديد مجموعة من المعايير التي يتم بناءً عليها المقارنة بين هذه البدائل. وبالطبع إذا أمكن تحديد البدائل وتحديد النواتج المتوقعة من كل بديل فإن عملية اتخاذ القرار تكون بسيطة وسهلة وتعتبر القرارات في هذه الحالة روتينية أو مبرمجة. ولكن هذه الحالة نادرة ما تواجه المديرون عند اتخاذ القرارات. فمعظم الحالات التي يواجهها المديرون تتميز بعدم توافر المعلومات مما يؤدي إلى عدم إمكانية تحديد جميع البدائل الممكنة أو تحديد النواتج المحتملة لكل بديل، ونتيجة لذلك ظهرت نظرية القرارات والتي تهدف إلى تمكين المديرين من اتخاذ القرارات في ظل ظروف بيئية تتسم بالحظر وعدم التأكد.

### مفهوم نظرية القرارات:

تهتم نظرية القرارات بصفة أساسية ببيان كيفية مساعدة متخذ القرار في صنع واتخاذ القرارات وذلك في ظل بيئة معينة، بحيث تمكنه من تحليل مجموعة من المواقف والتي تشتمل على العديد من البدائل المختلفة والنواتج المختلفة. كما تقدم أيضاً لمتخذ القرار الأساليب الرشيدة التي تساعد على الاختيار السليم للبديل المناسب خلال عملية اتخاذ القرار. وفي ضوء ذلك

يمكن القول أن نظرية القرارات تستخدم في معاونة متخذ القرار في اختيار البديل أو الإستراتيجية المثلى من بين عدة بدائل باستخدام الأسلوب التكنيكي المناسب لمعطيات كل قرار، وخاصة إذا كانت عملية اتخاذ القرار تتم في بيئة عدم التأكد. هذا بالإضافة إلى أن نظرية القرارات تستخدم عدد من النماذج الكمية التي تساعد متخذ القرار في تقييم البدائل المختلفة المتاحة أمامه لحل المشكلة وذلك لاختيار البديل الأفضل من بينها.

وتتمثل أهم التطبيقات لنظرية القرارات في المجال الإداري في اعداد تقديرات لإحتياجات الشركة الصناعية من الآلات والمعدات، واختيار أفضل الطرق لاختيار المواقع المناسبة لإقامة المشروعات والتوسعات الجديدة بالشركة، وتحديد ما إذا كانت توجد حاجة لإضافة خط إنتاجى جديد لخطوط الإنتاج بالشركة أم لا ؟

#### عناصر عملية صنع واتخاذ القرارات:

توجد عدة عناصر لعملية صنع واتخاذ القرارات وهى:

- 1- **متخذ القرار:** هو الشخص (فرد أو مجموعة) الذى يقوم باتخاذ القرار عن طريق اختيار البديل الأفضل من بين مجموعة البدائل المتاحة أمامه لحل مشكلة معينة أو تحقيق هدف معين.
- 2- **أهداف متخذ القرار:** قد يكون هدف متخذ القرار هو تعظيم الربح أو تدنية التكاليف أو تدعيم المركز التنافسى أو الحفاظ على بقاء واستمرار المنظمة، أو غير ذلك من الأهداف.
- 3- **مقياس التعظيم أو التفضيل:** وهو المقياس الذى يجب الرجوع إليه للتعرف على مدى تحقيق الأهداف. فقد يكون المقياس هو تعظيم الربح أو تدنية التكاليف. فإذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح فإنه يتم اختيار البديل الذى يحقق أكبر عائد ممكن، أما إذا كانت المشكلة تهدف إلى تدنية التكاليف فإنه يتم اختيار البديل الذى يحقق أقل تكلفة ممكنة.



**4- حالات الطبيعة:** تمثل العوامل الخارجية المؤثرة في عملية اتخاذ القرارات والتي لا يتمكن متخذ القرار من السيطرة عليها. وحالات الطبيعة تشير إلى الأحداث غير المؤكدة التي تقابل متخذ القرار بعد اتخاذه القرار، مثل أن يواجه متخذ قرار الشراء بعدم التأكد من الكمية التي سوف يقوم ببيعها في السوق، فالحالات المتوقعة تكون 50 ، 55 ، 60 ، 65 وحدة.

#### **خطوات تحليل القرار:**

تعرف عملية اتخاذ القرار بأنها اختيار البديل المناسب من بين البدائل المتاحة أمام متخذ القرار. وتتمثل الخطوات الرئيسية في تحليل أى قرار بصرف النظر عن درجة أهميته في ست خطوات رئيسية وهى:

- 1- التحديد الواضح للمشكلة التي تواجه الشركة.
- 2- تحديد وتنمية البدائل الممكنة للتعامل مع المشكلة.
- 3- تحديد النتائج المحتملة للموقف والقرار.
- 4- تحديد الربح والعوائد من كل بديل وكل نتيجة محتملة.
- 5- اختيار أحد نماذج نظرية القرار الرياضية.
- 6- تطبيق النموذج التي تم اختيار واتخاذ القرار.

#### **بيئة اتخاذ القرار:**

يختلف أسلوب اتخاذ القرار باختلاف متغيرات البيئة سواء كانت بيئة داخلية أو خارجية والتي تؤثر على سلوك متخذ القرار، كما أن نوع القرار المتخذ يتوقف عادة على كمية وحجم المعلومات المتوفرة عن الموقف الذي تم فيه اتخاذ القرار.

ويطلق على بيئة القرار ظروف القرار والتي يقصد بها درجة اليقين التي تتوفر لمتخذ القرار عند اتخاذه لقرار ما.

وفي ضوء ذلك يمكن التمييز بين أربعة أنواع من الظروف التي يتم في ظلها القيام بعملية اتخاذ القرارات وهي:

أولاً: اتخاذ القرار في ظل حالة التأكد التام.

ثانياً: اتخاذ القرار في ظل حالة عدم التأكد.

ثالثاً: اتخاذ القرار في ظل حالة الخطر.

رابعاً: اتخاذ القرار في ظل حالة الصراع (المناقسة)

وسوف نعرض فيما يلي للحالات الثلاثة الأولى أما الحالة الرابعة فسوف يتم التعرض لها في فصل نظرية المباريات.

أولاً: اتخاذ القرار في ظل حالة التأكد التام:

في ظل حالة التأكد التام تكون البيانات اللازمة لاتخاذ القرار معروفة ومؤكدة ومحددة. ويكون متخذ القرار على علم تام بكافة النتائج الخاصة بكل بديل من البدائل المتاحة أمامه لحل المشكلة، ومهمة متخذ القرار في هذا الصدد هي المفاضلة بين البدائل المختلفة لاختيار إحداها في ضوء المعيار المطبق (تعظيم الربح أو تدنية التكاليف).

أي أن البيانات والمعلومات تكون متوفرة ومؤكدة بنسبة 100% لنتائج البدائل الموجودة، وما على متخذ القرار إلا القيام باختيار البديل صاحب أفضل نتيجة موجودة بين هذه البدائل.

ثانياً: اتخاذ القرار في ظل حالة عدم التأكد:

تأتي هذه الحالة على عكس الحالة الأولى تماماً، حيث يكون متخذ القرار في حالة من عدم التأكد، حيث لا يتوافر له أي معلومات من تجارب الماضي يمكن الاسترشاد بها في حساب احتمالات حدوث حالات الطبيعة، أي لا يوجد توزيع احتمالي لتحقيق حالات الطبيعة. ويوجد أمام متخذ القرار عدة معايير يتم في ضوءها اتخاذ القرار، وعلى متخذ القرار أن يتعرف على هذه المعايير



جميعاً، ثم يختار المعيار الأكثر مناسبة لسياسة منظمته وأهدافها وهذه المعايير هي:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).
- 3- معيار الاحتمالات المتساوية.
- 4- معيار الواقعية.
- 5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذه المعايير من خلال عرض المثال التالي.

مثال (1): يعبر جدول العوائد التالي عن الربح المحقق في ظل ثلاثة بدائل وثلاث حالات متوقعة للطبيعة:

حالات الطبيعة			بدائل القرار
ط <sub>3</sub>	ط <sub>2</sub>	ط <sub>1</sub>	
4-	8	20	البديل الأول
4	12	14	البديل الثاني
8	2	8	البديل الثالث

والمطلوب: تحديد البديل الأمثل في ظل:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).
- 3- معيار الاحتمالات المتساوية.
- 4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية  $\alpha = 0.60$ .
- 5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

## 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل):

وفقاً لهذا المعيار فإن متخذ القرار يعتبر متفائلاً ، حيث يطلق على هذا المعيار معيار أكبر قيمة للحدود القصوى Maximax، حيث طبقاً لهذا المعيار يقوم متخذ القرار باختيار أكبر قيمة في كل بديل متاح أمامه، ثم يقوم باختيار أكبر أعلى الأرقام في حالة الأرباح أو أقل الأقل في حالة التكاليف، ولهذا سمي هذا المعيار بمعيار التفاؤل.

ويوضح الجدول التالي كيفية اتخاذ القرار باستخدام هذا المعيار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1):

بدائل القرار	حالات الطبيعة			أفضل نتيجة في كل بديل	أقصى الأقصى
	ط <sub>1</sub>	ط <sub>2</sub>	ط <sub>3</sub>		
الأول	20	8	4-	20	20
الثاني	14	12	4	14	-
الثالث	8	2	8	8	-

يلاحظ من الجدول السابق أننا قمنا بإضافة عمود يمثل أفضل نتيجة لكل بديل نسجل فيه أفضل النتائج (الحد الأعلى)، ثم قمنا بإضافة عمود نوضح فيه أكبر قيمة (أقصى الأقصى) فنجد أن البديل الأول هو الأفضل، حيث أفضل الأفضل في النتائج هو (20) وعلى ذلك ووفقاً لمعيار أقصى الأقصى يعتبر البديل الأمثل هو البديل الأول.

عيب هذا المعيار: هو أنه اهتمامه الوحيد منصب على أفضل نتيجة لكل بديل (قرار) مع تجاهل النتائج الأخرى، أي أن هذا المعيار ينحاز للجانب الإيجابي للمخاطرة ويتجاهل الجانب السلبي لها.



فلو أمعنا النظر في مصفوفة النتائج (جدول العوائد) لوجدنا أن البديل الأول يحقق أفضل نتيجة إذا سادت حالة الطبيعة (ط<sub>1</sub>)، ولكن هذا البديل يقودنا إلى خسارة (-4) إذا سادت حالة الطبيعة (ط<sub>3</sub>).

## 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم):

يطلق على هذا المعيار معيار أكبر قيمة في الحدود الدنيا الخاصة بنتائج كل بديل Maximini. أى فى ظل هذا المعيار يفترض أن حالة الطبيعة التى ستسود هى تلك التى تحقق النتيجة الأسوأ، لذلك فعلى متخذ القرار أن يختار البديل الذى يعطى أكبر عائد أى أقصى الأدنى، مع ملاحظة أنه فى حالة التعامل مع مصفوفة نتائج تعطى التكاليف أو الخسائر فإن هذا المعيار يصبح أدنى الأقصى، أى تقليل (تدنية) أقصى خسارة ممكنة.

ويوضح الجدول التالى كيفية اتخاذ القرار باستخدام هذا المعيار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1):

بدائل القرار	حالات الطبيعة			أدنى نتيجة فى لكل بديل	أقصى الأدنى
	ط <sub>1</sub>	ط <sub>2</sub>	ط <sub>3</sub>		
الأول	20	8	-4	-4	-
الثانى	14	12	4	4	4
الثالث	8	2	8	2	-

باستعراض مصفوفة النتائج وإضافة عمود يمثل أدنى نتيجة لكل بديل نسجل فيه أسوأ النتائج لكل بديل، ثم نقوم باختيار أفضل أسوأ النتائج، فنجد أن البديل الثانى هو الأفضل حيث أن أفضل أسوأ النتائج هى (4) والتى يحققها هذا البديل، وعلى ذلك ووفقا لمعيار أقصى الأدنى يعتبر البديل الثانى هو البديل الأمثل.

عيب هذا المعيار: هو أن اهتمامه الوحيد منصب على أدنى نتيجة لكل بديل مع تجاهل النتائج الأخرى، أى أن هذا المعيار يحتاط من الجانب السلبي للمخاطرة ويتجاهل الجانب الايجابى لها. فلو أمعنا النظر فى مصفوفة النتائج (جدول العوائد) لوجدنا أن البديل الثانى يحقق أدنى نتيجة إذا سادت حالة الطبيعة (ط<sub>3</sub>) ولكن هذا البديل يقودنا إلى أرباح (12، 14) إذا سادت حالات الطبيعة (ط<sub>2</sub>، ط<sub>1</sub>) على التوالى.

### 3- معيار الاحتمالات المتساوية:

يعرف هذا المعيار بمعيار " لا بلاس " Laplace، وبمقتضاه يجب أن تكون لحالات الطبيعة احتمالات متساوية، حيث يتم حساب الوسط الحسابى لنتائج كل بديل على حدة، ثم يتم اختيار البديل صاحب أعلى وسط حسابى من بين تلك الأوساط الحسابية فى حالة تعظيم الربح واختيار البديل صاحب أقل وسط حسابى فى حالة تدنية التكاليف.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار فى اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1) كما يلى:

$$\text{الوسط الحسابى للبديل الأول} = \frac{20 + 8 + (-4)}{3} = 8$$

$$\text{الوسط الحسابى للبديل الثانى} = \frac{14 + 12 + 4}{3} = 10$$

$$\text{الوسط الحسابى للبديل الثالث} = \frac{8 + 2 + 8}{3} = 6$$



يتم اختيار البديل صاحب أعلى وسط حسابي، وهو البديل الثاني. وبالتالي وفقاً لمعيار الاحتمالات المتساوية يعتبر البديل الأمثل هو البديل الثاني صاحب أعلى وسط حسابي مقارنة بالبديلين الآخرين.

عيب هذا المعيار: كثير من الكتاب يهاجمون هذا المعيار على أساس أنه لا يعطى أساس سليم لاتخاذ القرار لاعتماده على عدد حالات الطبيعة عند حساب الوسط الحسابي، فكيف يتم اختيار أكبر وسط حسابي طالما أنه يفترض تساوى احتمالات تحقق حالات الطبيعة.

#### 4- معيار الواقعية:

يطلق على هذا المعيار " ليونيد هورويز " ويجمع بين أفضل نتيجة وأسوأ نتيجة لكل بديل. كما يعرف أيضاً باسم معيار الوسط المرجح، فهو معيار توافقي بين معيارى التفاؤل والتشاؤم يقوم على حساب معامل الواقعية والذي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، حيث تقترب قيمته من الصفر فى حالة التشاؤم، وتقترب قيمته من الواحد الصحيح فى حالة التفاؤل، ويكون مجموع الرقمين (الاحتمالية) تساوى الواحد الصحيح.

وفى الغالب يقوم متخذ القرار باختيار رقماً بين (0.5) والواحد الصحيح للتعبير عن التفاؤل وباقى الواحد الصحيح للتعبير عن التشاؤم. وعند اتباع هذا المعيار يلزم اتباع الأتى:

أ- تحديد معامل الواقعية  $\alpha$  (دليل التفاؤل).

ب- تحديد دليل التشاؤم  $1 - \alpha$ .

ج- إختيار أقصى نتيجة وأدنى نتيجة لكل بديل.

د- تحديد قيمة معيار الواقعية

$\alpha = (\text{أقصى نتيجة لكل بديل}) + (\alpha - 1) (\text{أدنى نتيجة لكل بديل})$

هـ - إختيار البديل صاحب أكبر قيمة لمعيار الواقعية.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار في اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق (رقم 1) كما يلي:

حيث أن معامل الواقعية أو دليل للتفاؤل  $= 0.6$

$\therefore$  دليل التشاؤم  $= 1 - 0.6 = 0.4$

\* قيمة معيار الواقعية للبديل الأول

$$= 0.6(20) + 0.4(-4) = 10.4$$

(حيث أن أقصى نتيجة = 20، وأدنى نتيجة = -4)

\* قيمة معيار الواقعية للبديل الثاني

$$= 0.6(14) + 0.4(4) = 10$$

(حيث أن أقصى نتيجة = 14، وأدنى نتيجة = 4)

\* قيمة معيار الواقعية للبديل الثالث

$$= 0.6(8) + 0.4(2) = 5.6$$

(حيث أن أقصى نتيجة = 8، وأدنى نتيجة = 2)

ثم نختار أكبر قيمة لمعيار الواقعية وهي (10.4) وبالتالي يصبح البديل الأمثل هو البديل الأول.

## 5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى)

يطلق على هذا المعيار معيار "سافاج Savage"، كما يسمى أيضاً معيار الحد الأدنى للحدود القصوى Minimax، يأخذ هذا المعيار في الحسبان الأسف أو الندم الذي يشعر به متخذ القرار بعد اتخاذ القرار، فإذا لم يأخذ القرار السليم فإنه يشعر بالأسف بمقدار الفرق بين أفضل نتيجة والنتيجة التي حصل عليها بالنسبة لبديل معين، بمعنى أنه إذا اختار متخذ القرار بديل معين ثم اتضح له أنه كان يمكن أن يحقق ربحاً أكثر لو اختار بديل آخر، وذلك لأن حالة الطبيعة التي حدثت مخالفة لما توقع متخذ القرار.



وبذلك يشعر متخذ القرار بالأسف والندم على الفرص الضائعة، لذلك يتم تحويل مصفوفة العوائد الأصلية إلى مصفوفة أسف (مصفوفة خسارة الفرصة البديلة). ويمكن حساب خسارة الفرصة البديلة لكل حالة من حالات الطبيعة عن طريق طرح القيم الموجودة في العمود الذي يمثل حالة الطبيعة من أقصى قيمة موجودة في نفس العمود، وتكون القيمة صفر في كل عمود هي أفضل نتيجة يمكن الحصول عليها في حالة الطبيعة التي يمثلها كل عمود، أما القيم الموجبة في كل عمود من أعمدة حالات الطبيعة فتعبر عن مقدار الأسف (خسارة الفرصة البديلة).

ووفقاً لهذا المعيار نقوم أولاً باختيار أكبر قيم للخسائر المتعلقة بالفرصة البديلة وذلك لكل بديل على حدة، ثم نقوم بعد ذلك باختيار البديل الذي يعطى أقل قيمة قصوى من الخسائر.

ويمكن توضيح كيفية استخدام هذا المعيار في اتخاذ القرار بالتطبيق على المثال السابق رقم (1) كما يلي:

أولاً: اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة وذلك لكل بديل كما يلي:

الحد الأدنى للحدود القصوى	الحد الأعلى في الصف	حالات الطبيعة			بدائل القرار
		ط <sub>3</sub>	ط <sub>2</sub>	ط <sub>1</sub>	
-	12	12	4	صفر	الأول
6	6	4	صفر	6	الثاني
-	12	صفر	10	12	الثالث

\* تم اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة كما يلي:

أ- بالنسبة للعمود الأول (حالة الطبيعة ط<sub>1</sub>) تم طرح قيم هذا العمود وهي (20، 14، 8) من أكبر قيمة في هذا العمود وهي (20) وبالتالي تصبح قيم العمود الأول هي (صفر، 6، 12) على التوالي.

ب- بالنسبة للعمود الثانى (حالة الطبيعة ط<sub>2</sub>) تم طرح قيم هذا العمود وهى (8، 12، 2) من أكبر قيمة فى هذا العمود وهى (12) وبالتالى تصبح قيم العمود الثانى هى (4، صفر، 10) على التوالى.

ج- بالنسبة للعمود الثالث (حالة الطبيعة ط<sub>3</sub>) تم طرح قيم هذا العمود وهى (-4، 4، 8) من أكبر قيمة فى هذا العمود وهى (8) وبالتالى تصبح قيم العمود الثالث هى (12، 4، صفر) على التوالى.

\* وبعد اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة يتم تحديد الحد الأعلى فى كل صف (كل بديل) وهى بالترتيب (12، 6، 12)، ثم يتم اختيار البديل الذى يعطى أقل قيمة قصوى من الخسائر (الحد الأدنى للحدود القصوى) وهو هنا البديل الثانى. إذا وفقاً لمعيار الأسف أو الندم يعتبر البديل الثانى هو البديل الأمثل.

وفى نهاية عرضنا لهذا المعيار يجب أن ننوه بأن كل الخطوات السابقة تمت على مصفوفة النتائج (العوائد) التى تمثل أرباح، أما فى حالة استخدام مصفوفة نتائج تمثل تكاليف أو خسارة فيتم اتباع الآتى:

- 1- أحسن نتيجة فى كل عمود من أعمدة الطبيعة هى أقل رقم فى كل عمود.
- 2- يتم الوصول إلى مصفوفة خسارة الفرصة البديلة عن طريق طرح أقل قيمة فى كل عمود من جميع قيم العمود.
- 3- اختيار أكبر رقم أسف لكل بديل (الحد الأعلى فى الصف) وهو يمثل أكبر تكلفة إضافية يمكن تحملها لو كانت حالات الطبيعة لا تسير كما افترض متخذ القرار.
- 4- تطبيق معيار أدنى الأقصى وذلك باختيار البديل صاحب أدنى قيمة فى عمود الحد الأعلى فى الصف ليعبر عن البديل الأمثل.

ثالثاً: اتخاذ القرار فى ظل حالة الخطر:



تأتى هذه الحالة فى مكان وسط بين الحالتين السابقتين، حيث تتوافر أمام متخذ القرار بعض البيانات والمعلومات وليس كلها، وبالتالي فالموقف فى هذه الحالة يخضع للاحتتمالات.

وتتميز المشكلة فى حالة المخاطرة بوجود عدة بدائل، ووجود أكثر من عائد لكل بديل، ووجود عدة حالات للطبيعة مع معرفة الاحتمال المتوقع لحدوث كل منها.

وفى ضوء ذلك فإن متخذ القرار يحدد فى ظل بيئة الخطر احتمالات حدوث كل حالة من حالات الطبيعة (الحالات المستقبلية المتوقعة)، ويعتبر كل من أسلوب القيمة النقدية المتوقعة وكذلك أسلوب شجرة القرارات من أكثر الأساليب استخداماً فى اتخاذ القرارات فى ظل حالة الخطر. ويمكن إلقاء الضوء على كل أسلوب من هذين الأسلوبين وبيان كيفية استخدامه فى اتخاذ القراران فى ظل حالة الخطر فيما يلى:

### القيمة النقدية المتوقعة: Expected Monetary Value (EMV)

تتطوى القيمة النقدية المتوقعة لبديل ما على القيم المختلفة لهذا البديل مرجحة باحتمالات حدوث كل قيمة، وتشير المعادلة التالية إلى كيفية التى يتم بها حساب القيمة النقدية المتوقعة:

$$ق ن م = ق 1 \times ح 1 + ق 2 \times ح 2 + ..... ق ن \times ح ن$$

حيث أن:

ق ن م: ترمز إلى إجمالى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل.

ق 1 ... ق ن: ترمز إلى القيم النقدية لكل بديل حسب ترتيبه الأول ثم الثانى.....

ح 1 ... ح ن: ترمز إلى احتمالات حدوث كل حالة مستقبلية مرتبة حسب ترتيبها الحالة الأولى ثم الحالة الثانية.....

وتعتمد هذه الطريقة على اختيار البديل (القرار) الذي يحقق أفضل قيمة نقدية متوقعة. ويتم حساب القيمة النقدية المتوقعة (EMV) لبديل ما من خلال مجموع حاصل ضرب العوائد المحتملة في احتمالات حدوث تلك العوائد. ويتحقق الحل في ظل هذه الطريقة عن طريق الآتي:

أ- ضرب كل عائد في احتمال حدوثه.

ب- جمع نتائج عمليات الضرب لكل بديل (قرار).

ج- اختيار البديل الذي يحقق أكبر قيمة نقدية متوقعة.

ويقوم متخذ القرار بحساب القيمة المتوقعة للعائد من كل بديل ويختار البديل الذي يحقق أعلى عائد في حالة كون العائد ربحاً أو اختيار البديل الذي يحقق أقل عائد في حالة كون العائد تكاليف أو خسارة. وبناء عليه يمكن استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة في حالة الأرباح وفي حالة الخسائر كما يلي:

أولاً: استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة في حالة الأرباح:

تسمى طريقة القيمة النقدية المتوقعة في هذه الحالة بطريقة القيمة أو العائد المتوقع Expected Value Payoff ويمكن بيان كيفية استخدام هذه الطريقة في اتخاذ القرارات في ظل حالة الخطر من خلال عرض المثال التالي:

مثال (2): تواجه إحدى الشركات قرار بزيادة الطاقة الإنتاجية لمواجهة الطلب على منتجاتها. وقدرت دراسات الجدوى احتمالات الطلب بأن يكون منخفض أو متوسط أو مرتفع. وكانت احتمالات الحدوث لحالات الطلب هي: 0.40 ، 0.35 ، 0.25 على التوالي.

وانحصرت البدائل التي يمكن أن تلجأ إليها الشركة في التشغيل ساعات إضافية أو زيادة قوة العمل أو العمل ورديات إضافية. والجدول التالي يظهر العائد المتوقع في حالة تحقيق حالات الطلب المختلفة:



حالات الطلب البدائل	مرتفع	متوسط	منخفض
الساعات الإضافية	180	140	100
زيادة قوة العمل	200	100	60
ورديات إضافية	400	40	صفر
الاحتمالات	0.25	0.35	0.40

المطلوب: استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع في تحديد البديل الأمثل للشركة.

### الحل

يتم ايجاد القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلي:

\* القيمة النقدية المتوقعة لبديل الساعات الإضافية =

$$134 = (0.40 \times 100) + (0.35 \times 140) + (0.25 \times 180)$$

\* القيمة النقدية المتوقعة لبديل زيادة قوة العمل =

$$109 = (0.40 \times 60) + (0.35 \times 100) + (0.25 \times 200)$$

\* القيمة النقدية المتوقعة لبديل الورديات الإضافية =

$$114 = (0.40 \times \text{صفر}) + (0.35 \times 40) + (0.25 \times 400)$$

وفي ضوء ذلك يتم تفضيل البديل الأول (بديل الساعات الإضافية)

باعتباره صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة مقارنة بالبديلين الآخرين.

ثانياً: استخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة في حالة الخسائر:

تسمى طريقة القيمة النقدية المتوقعة في هذه الحالة بطريقة خسارة الفرصة

البديلة المتوقعة Expected Opportunity Loss ويؤدي استخدام هذه

الطريقة إلى الوصول إلى نفس الحل الذي تم التوصل إليه في ظل طريقة

القيمة أو العائد المتوقع، حيث في هذه الحالة يتم اختيار البديل الذي يحقق أقل

خسارة متوقعة.

ويمكن تلخيص إجراءات الحل في ظل هذه الطريقة على النحو التالي:

1- اعداد جدول أو مصفوفة خسارة الفرصة البديلة عن طريق أخذ أكبر رقم في كل عمود (كل حالة من حالات الطبيعة) وطرح كل أرقام هذا العمود من هذا الرقم.

2- حساب القيمة المتوقعة للخسارة لكل بديل عن طريق ضرب كل احتمال في رقم الخسارة المناظر ثم تجميع النواتج لكل بديل.

3- يتم اختيار البديل الذي يحقق أقل خسارة متوقعة.

مثال (3): في المثال السابق (رقم 2) المطلوب استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة المتوقعة في تحديد البديل الأمثل للشركة.

### الحل

أولاً: اعداد مصفوفة خسارة الفرصة البديلة كما يلي:

\* في ظل الطلب المرتفع: يتم طرح أرقام عمود الطلب المرتفع وهي 180 ، 200 ، 400 من أكبر رقم في هذا العمود وهو 400 وبالتالي تصبح أرقام خسارة الفرصة البديلة في ظل الطلب المرتفع هي: 220 ، 200 ، صفر، على التوالي.

ويتم القيام بنفس الشيء في ظل حالتي الطلب المتوسط والمنخفض.

ويعبر الجدول التالي عن مصفوفة خسارة الفرصة البديلة:

حالات الطلب البدائل	مرتفع	متوسط	منخفض
الساعات الإضافية	220	صفر	صفر
زيادة قوة العمل	200	40	40
ورديات إضافية	صفر	100	100
الاحتمالات	0.25	0.35	0.40



ويمكن حساب القيم المتوقعة للخسارة في ظل كل بديل على النحو التالي:

\* القيمة المتوقعة للخسارة لبديل الساعات الإضافية =

$$55 = (0.25 \times 220) + (0.35 \times \text{صفر}) + (0.40 \times \text{صفر})$$

\* القيمة المتوقعة للخسارة لبديل زيادة قوة العمل =

$$80 = (0.25 \times 200) + (0.35 \times 40) + (0.40 \times 40)$$

\* القيمة المتوقعة للخسارة لبديل الورديات الإضافية =

$$75 = (0.25 \times \text{صفر}) + (0.35 \times 100) + (0.40 \times 100)$$

وفي ضوء ذلك يتم تفضيل البديل الأول (بديل الساعات الإضافية) باعتباره أقل قيمة متوقعة للخسارة مقارنة بالبديلين الآخرين. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الاعتماد على أى من الطريقتين طريقة القيمة أو العائد المتوقع وطريقة خسارة الفرصة البديلة سوف يؤدي إلى اختيار نفس البديل.

**القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة:**

تظهر مشكلة تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة عندما يريد المدير الوصول إلى أفضل النتائج التي توضح له معلومات عن حالة السوق في المستقبل، بحيث تساعد على تحسين تقديرات الاحتمالات الحالية لحالات الطبيعة عن طريق اعداد الدراسات اللازمة لتحقيق ذلك.

وبمعنى آخر فإن تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة يمكن المدير من تحديد القيمة التي يمكن أن يدفعها للحصول على المعلومات الناتجة عن إجراء مسح سوقى بخبرة عن حالة السوق خلال فترة مستقبلية. فعن طريق تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة يمكن للشركة أن تحدد الحد الأقصى لما يمكن أن تدفعه في مقابل المعلومات التي تحسن من قراراتها.

وتجدر الإشارة إلى ضرورة التفرقة بين مصطلحين هامين وهما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة والقيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة.

فمصطلح القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة يشير إلى العائد المتوقع في الأجل الطويل لو أن متخذ القرار لديه المعلومات الكاملة قبل قيامه باتخاذ القرار. أما مصطلح القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة فيشير إلى النتائج المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة مطروحاً منها القيمة المتوقعة بدون المعلومات الكاملة (القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة) . ويتم حساب القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة باستخدام المعادلة التالية:

**\* القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة**

= (أفضل بديل في الحالة المستقبلية الأولى × احتمال حدوث هذه الحالة)  
+ (أفضل بديل في الحالة المستقبلية الثانية × احتمال حدوث هذه الحالة)  
+ (أفضل بديل في الحالة المستقبلية الأخيرة × احتمال حدوث هذه الحالة)  
**\* أما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة (أو قيمة المعلومات الكاملة)**  
= القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة - القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة.

وفيما يلي توضيح لكيفية حساب قيمة المعلومات الكاملة من خلال المثال التالي:

**مثال (4):** يرغب أحد المستثمرين في الإستثمار إما في مجال تجارة السيارات أو في مجال تجارة الأجهزة الكهربائية. فإذا علمت أنه في حالة حدوث ركود نسبي فإن أرباح بيع السيارات ستكون 180000 باحتمال قدرة 0.4، وفي حالة حدوث رواج نسبي فإن أرباح بيع السيارات ستبلغ 260000. أما بالنسبة لمجال تجارة الأجهزة الكهربائية فإن الأرباح في حالة حدوث ركود نسبي ستكون 168000، في حين ستكون 280000 في حالة حدوث رواج نسبي.

**المطلوب:**



1- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

2- للمساعدة في حل المشكلة السابقة تقدم أحد الخبراء بعرض المعلومات السابقة نظير أتعاب قدرها 6000 جنيه فهل ستوافق على الإستعانة برأية أم لا؟

### الحل

1- اعداد مصفوفة العوائد:

البدائل	الحالات	ركود نسبي	رواج نسبي
السيارات		180000	260000
الأجهزة الكهربائية		168000	280000
الاحتمالات		0.4	0.6

\* حساب القيمة المتوقعة لكل بديل:

\* القيمة المتوقعة لتجارة السيارات =

$$(0.4 \times 180000) + (0.6 \times 260000) = 228000 \text{ جنيه}$$

\* القيمة المتوقعة لتجارة الأجهزة الكهربائية =

$$(0.4 \times 168000) + (0.6 \times 280000) = 235200 \text{ جنيه}$$

∴ البديل الأفضل هو بديل تجارة الأجهزة الكهربائية.

\* وحتى يمكن حساب قيمة المعلومات الكاملة نتبع الخطوات التالية:

1- حساب القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة =

أفضل بديل في ظل حالة الركود النسبي × احتمال حدوث حالة الركود النسبي

+ أفضل بديل في ظل حالة الرواج النسبي × احتمال حدوث حالة الرواج

النسبي

$$(0.4 \times 180000) + (0.6 \times 280000) = 240000 \text{ جنيه.}$$

2- القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة = 235200 جنيه.

3- قيمة المعلومات الكاملة =

القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة - القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة

$$= 240000 - 235200 = 4800 \text{ جنيه.}$$

المطلوب الثانى: نرفض عرض الخبير لأن تكلفة المعلومات = 6000 جنيه وهى أكبر قيمة المعلومات الكاملة وهى 4800 جنيه.

### تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يمثل تحليل الحساسية مدخلاً لبيان كيفية تأثير أى تغيير فى التقدير الخاص باحتمالات حدوث الحالات المستقبلية على القرار.

ويوضح المثال التالى كيفية إجراء تحليل الحساسية:

مثال (5): يعبر الجدول عن الأرباح المتوقعة لإحدى المشكلات التى يتوافر فيها ثلاثة بدائل وحالتين من الحالات المستقبلية المحتملة:

الحالات البدائل	ص1	ص2
البديل الأول	40000	36000 -
البديل الثانى	20000	4000 -
البديل الثالث	15000	2500 -

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لإيجاد قيم الاحتمالات، وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.

الحل



تحليل الحساسية هو تحليل نستطيع من خلاله حساب المدى الذي يتم فيه تغيير احتمالات حدوث الحالات المستقبلية وأثر ذلك على القرار المتخذ وذلك من خلال الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى:** بفرض أن احتمال حدوث الحالة (ص<sub>1</sub>) قيمة مقدارها  $= ح$  ، وبالتالي فإن احتمال حدوث الحالة (ص<sub>2</sub>)  $= 1 - ح$  ، ويتم حساب القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلي:

**\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول**

$$\begin{aligned} &= 40000 ح + (36000 - ح) (1 - ح) \\ &= 40000 ح + 36000 - 36000 ح \\ &= 76000 ح - 36000 \leftarrow \text{المعادلة الأولى} \end{aligned}$$

**\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني**

$$\begin{aligned} &= 20000 ح + (4000 - ح) (1 - ح) \\ &= 20000 ح + 4000 - 4000 ح \\ &= 24000 ح - 4000 \leftarrow \text{المعادلة الثانية} \end{aligned}$$

**\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث**

$$\begin{aligned} &= 15000 ح + (2500 - ح) (1 - ح) \\ &= 15000 ح + 2500 - 2500 ح \\ &= 17500 ح - 2500 \leftarrow \text{المعادلة الثالثة} \end{aligned}$$

وبناء على ذلك فإنه تم التوصل إلى المعادلات الثلاث التالية:

$$\text{معادلة البديل الأول} = 76000 ح - 36000$$

$$\text{معادلة البديل الثاني} = 24000 ح - 4000$$

$$\text{معادلة البديل الثالث} = 17500 ح - 2500$$

**الخطوة الثانية:** استخدام المعادلات الثلاث السابقة في ايجاد الاحتمالات التعادلية والتي يمكن أن تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل مع البديل الآخر وذلك كما يلي:

**الحالة الأولى:** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني

$$76000 \text{ ح} - 36000 = 24000 \text{ ح} - 4000$$

$$52000 \text{ ح} = 32000$$

$$\therefore \text{ح} = 52000 \div 32000 = 0.6153846$$

**الحالة الثانية:** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$76000 \text{ ح} - 36000 = 17500 \text{ ح} - 2500$$

$$58500 \text{ ح} = 33500$$

$$\therefore \text{ح} = 58500 \div 33500 = 0.5726495$$

**الحالة الثالثة:** القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$24000 \text{ ح} - 4000 = 17500 \text{ ح} - 2500$$

$$6500 \text{ ح} = 1500$$

$$\therefore \text{ح} = 6500 \div 1500 = 0.2307692$$

ويلاحظ أنه لا يمكن لمتخذ القرار تفضيل بديل على بديل آخر عند كل احتمال تعادلي من الاحتمالات الثلاثة السابقة، حيث يتساوى تفضيل متخذ القرار للبديل الأول مع البديل الثاني عندما يكون الاحتمال  $0.6153846$  ويتساوى تفضيله للبديل الأول مع البديل الثالث عندما يكون الاحتمال  $0.5726495$ ، ويتساوى تفضيله للبديل الثاني مع البديل الثالث عندما يكون الاحتمال  $0.2307692$



يتضح مما سبق أن الطريقة الجبرية لا تمكن متخذ القرار من تفضيل بديل على بديل آخر. ولذلك يمكن استخدام الطريقة البيانية لتحديد المدى الاحتمالي المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ.

الطريقة البيانية: وفقاً لهذه الطريقة يتم اعداد رسم بياني يعبر فيه المحور الأفقى عن الاحتمالات (ح)، بينما يعبر المحور الرأسى عن القيمة النقدية المتوقعة، ويتم تمثيل المعادلات الثلاثة السابقة باعتبارها معادلات خطية فى الشكل البياني على النحو التالى:

الخطوة الأولى: رسم المعادلات الثلاثة:

المعادلة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

$$76000 - 36000 =$$

بافتراض أن: ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

$$= (76000 \times \text{صفر}) - 36000 = -36000 \text{ جنيه.}$$

وبافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول =

$$(76000 \times 1) - 36000 = 40000 \text{ جنيه.}$$

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، - 36000) ، (1 ، 40000).

المعادلة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

$$24000 - 4000 =$$

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

$$= (24000 \times \text{صفر}) - 4000 = -4000 \text{ جنيه.}$$

وبافتراض أن ح = 1 ∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثانى

$$= (1 \times 24000) - 4000 = 20000 \text{ جنيه.}$$

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

$$(\text{صفر} , - 4000) , (1 , 20000)$$

المعادلة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$= 17500 \text{ ح} - 2500$$

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$= (17500 \times \text{صفر}) - 2500 = - 2500 \text{ جنيه.}$$

وبافتراض أن ح = 1 ∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

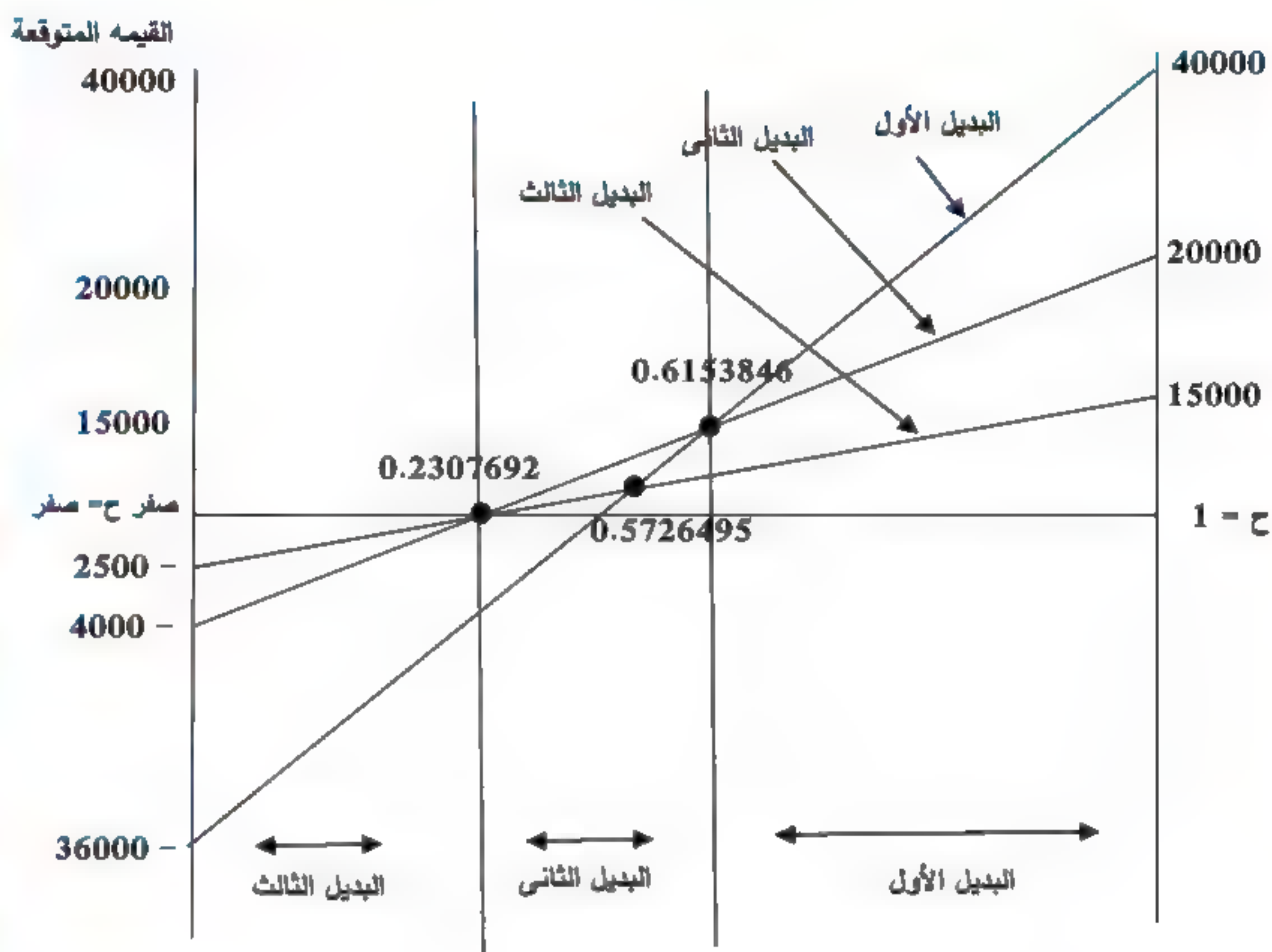
$$= (1 \times 17500) - 2500 = 15000 \text{ جنيه.}$$

وبالتالى يتم رسم خط هذه المعادلة بين النقطتين التاليتين:

$$(\text{صفر} , - 2500) , (1 , 15000)$$

وفى ضوء ذلك يمكن اعداد الرسم البيانى كما يلى:





ومن خلال تحليل الشكل البياني فإنه يمكن تحديد المدى الاحتمالي المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ عن طريق تحديد أفضل بديل يتناسب مع كل مدى احتمالي متوقع وذلك كما يلي:

1- يمكن لمتخذ القرار إذا كان الاحتمال المتوقع يقل عن 0.2307692 تفضيل البديل الثالث لأن هذا البديل سوف يظل دائماً صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة عند هذا المدى من الاحتمالات.

2- يتساوى البديل الثاني والثالث عندما تكون نسبة الاحتمال المتوقع  $0.2307692 =$  بحيث يصعب على متخذ القرار تفضيل بديل على آخر، ويرجع ذلك إلى تساوى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل منهما عند هذا الاحتمال.

3- يمكن لمتخذ القرار تفضيل البديل الثاني عندما تكون نسب الاحتمالات المتوقعة أكبر من 0.2307692 وأقل من 0.6153846، ويرجع ذلك إلى أن هذا البديل سوف يظل صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة في ظل هذا المدى من الاحتمالات.

4- يتساوى البديلان الأول والثاني عندما تكون نسبة الاحتمال المتوقع = 0.6153846 ، ويرجع ذلك إلى تساوى القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل منهما مع الآخر عند هذا الاحتمال.

5- يمكن لمتخذ القرار تفضيل البديل الأول عندما تكون نسب الاحتمالات المتوقعة أكبر من 0.6153846، ويرجع ذلك إلى أن هذا البديل سوف يظل دائماً صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة في ظل هذا المدى من الاحتمالات.

مثال (6): يعبر الجدول التالي عن العوائد المتوقعة لإحدى المشكلات التي تحتوى على ثلاثة بدائل وحالتين من الحالات المستقبلية المحتملة: (القيمة بالجنيه)

الحالات البدائل	ص1	ص2
البديل الأول	30	20
البديل الثانى	20	24
البديل الثالث	16	40

فإذا علمت أن احتمال حدوث الحالة المستقبلية الأولى (ص1) = 0.8 المطلوب:

- 1- باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ماهو البديل الأفضل (الأمثل).
- 2- تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة.



3- استخدام مدخل تحليل الحساسية في تحديد الاحتمال الخاص بالحالة المستقبلية (ص1) والذي يجعل القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل أكبر ما يمكن.

### الحل

1- تحديد البديل الأمثل: عن طريق ايجاد القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلي:

\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول =  $(0.8 \times 30) + (0.2 \times 20) = 28$  جنيه.  
\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني =  $(0.8 \times 20) + (0.2 \times 24) = 20.8$  جنيه.  
\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث =  $(0.8 \times 16) + (0.2 \times 40) = 20.8$  جنيه.

∴ البديل الأمثل هو البديل الأول لأنه صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة.

2- تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة:

= القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة - القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة

$$= 28 - [(0.8 \times 30) + (0.2 \times 40)] = 28 - 32 = -4 \text{ جنيه.}$$

3- استخدام مدخل تحليل الحساسية في تحديد الاحتمال الخاص بالحالة المستقبلية (ص1) والذي يجعل القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل أكبر ما يمكن:

الخطوة الأولى: نفترض أن احتمال حدوث الحالة ص1 = ح ، واحتمال حدوث

$$\text{الحالة ص2} = 1 - ح$$

وتكوين معادلة القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل كما يلي:

\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

$$= 30 ح + 20 (1 - ح) = 30 ح + 20 - 20 ح = 10 ح + 20$$

\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني

$$20 = 24 + ح (1 - ح) = 20 + ح 24 - 24 + ح 4 - = 24 + ح$$

\* القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$16 = 40 + ح (1 - ح) = 16 + ح 40 - 40 + ح 24 - = 40 + ح$$

وبناء على ذلك فإنه تم التوصل إلى المعادلات الثلاث التالية:

$$\text{معادلة البديل الأول} = 10 + ح 20$$

$$\text{معادلة البديل الثاني} = 24 + ح 4 -$$

$$\text{معادلة البديل الثالث} = 40 + ح 24 -$$

الخطوة الثانية: إيجاد الاحتمالات التعادلية والتي تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة لكل بديل مع البديل الآخر كما يلي:

الحالة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني

$$10 + ح 20 = 24 + ح 4 -$$

$$14 = ح 4 \quad \therefore ح = 14 \div 4 = 0.2857142 \simeq 0.28$$

الحالة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$10 + ح 20 = 40 + ح 24 -$$

$$34 = ح 20 \quad \therefore ح = 34 \div 20 = 0.5882352 \simeq 0.59$$

الحالة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني = القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$24 + ح 4 - = 40 + ح 24 -$$

$$20 = ح 16 \quad \therefore ح = 20 \div 16 = 0.8$$



الخطوة الثالثة: رسم المعادلات الثلاثة:

المعادلة الأولى: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول

$$20 = 10 + ح$$

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول =  $20 = 20 + (10 \times \text{صفر})$

بافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول =  $30 = 20 + (1 \times 10)$

وبالتالي يتم رسم خط المعادلة الأولى بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 20) ، (1 ، 30)

المعادلة الثانية: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني

$$24 = -4 + ح$$

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني =  $24 = 24 + (-4 \times \text{صفر})$

بافتراض أن ح = 1

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثاني =  $20 = 24 + (-4 \times 1)$

وبالتالي يتم رسم خط المعادلة الثانية بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 24) ، (1 ، 20)

المعادلة الثالثة: القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث

$$40 = 24 + ح$$

بافتراض أن ح = صفر

∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث =  $40 = 40 + (24 \times \text{صفر})$

وبافتراض أن ح = 1

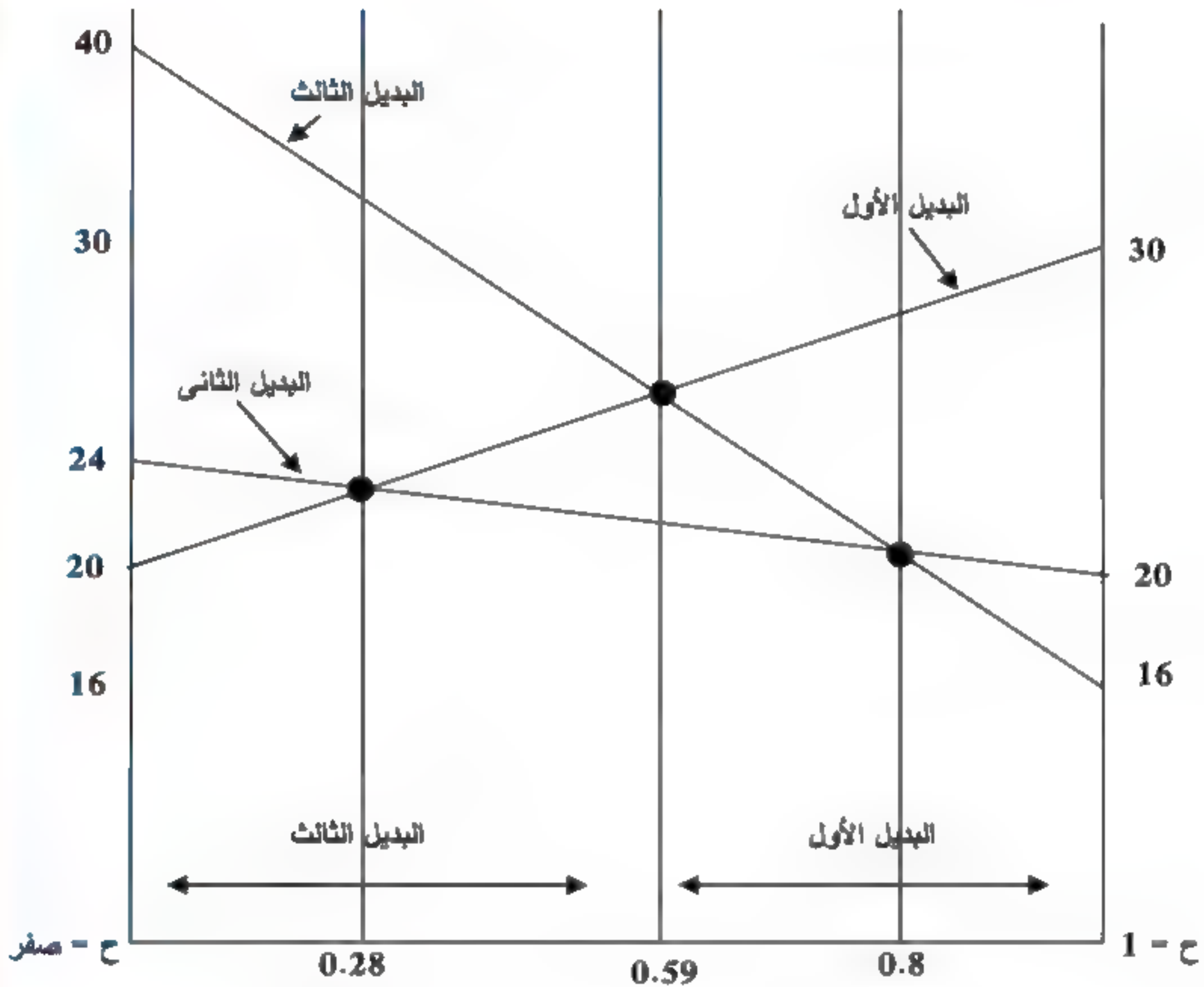
∴ القيمة النقدية المتوقعة للبديل الثالث =  $16 = 40 + (24 \times 1)$

وبالتالي يتم رسم خط المعادلة الثالثة بين النقطتين التاليتين:

(صفر ، 40) ، (1 ، 16)

وفى ضوء ذلك يتم اعداد الرسم البياني كما يلي:

القيمة المتوقعة



ومن خلال تحليل الرسم البياني فإنه يمكن تحديد المدى الاحتمالي المتوقع وبيان مدى تأثيره على القرار المتخذ عن طريق تحديد أفضل بديل يتناسب مع كل مدى احتمالي متوقع كما يلي:

البديل الثاني لا يظهر أعلى بديل في أى منطقة تقاطع بين الخطوط ولكن سيكون دائما البديل الثالث أو البديل الأول، وحيث أن نسبة الاحتمال التعادلي التي تتساوى عندها القيمة النقدية المتوقعة للبديل الأول مع البديل الثالث  $0.59 =$



فيمكن أن نستخلص ما يلي:

1- إذا كانت احتمالات (ص1) تساوى صفر إلى أقل من 0.59 فإن البديل الثالث هو البديل الأفضل.

2- إذا كانت احتمالات (ص1) = 0.59 فإن البديل الثالث يتساوى مع البديل الأول.

3- إذا كانت احتمالات (ص1) أكبر من 0.59 فإن البديل الأول هو البديل الأفضل.

فمثلاً إذا كان احتمال (ص1) = 0.34 فإن البديل الثالث هو البديل الأفضل، أما إذا كان احتمال (ص1) = 0.90 فإن البديل الأول هو البديل الأفضل.

### شجرة القرار Decision Tree

تعتبر شجرة القرار من أهم الأساليب التي يمكن لمتخذ القرار استخدامها في حل المشكلات ولاسيما تلك المشكلات التي تمر بعدة مراحل أى يمكن استخدامها لمعالجة حالة القرارات ذات المواقف المتتالية، فقد يرى متخذ القرار في مرحلة معينة انشاء مصنع صغير ولكن بعد تغيير الحالة التي عليها الطلب قد يكون متخذ القرار في موقف المفاضلة بين إضافة وحدة جديدة صغيرة أو إجراء توسع في طاقة المصنع الحالي.

وشجرة القرار عبارة عن رسم تخطيطي يوضح البدائل المتاحة أمام متخذ القرار في مواقف معينة والأثار المترتبة على كل بديل، وتتكون شجرة القرار من بعض الرموز الأساسية المتعارف عليها في رسم الشجرة وهي:

☐ المربع الصغير والذي يستخدم للتعبير عن نقطة لاتخاذ القرار يبدأ من هذه النقطة فروع يمثل كل منها بديل متاح أمام متخذ القرار، ويجب عند هذه النقطة اختيار بديل من بين مجموعة البدائل المتاحة، وتبدأ شجرة القرار دائماً بهذا الشكل.

الدائرة الصغيرة تستخدم أيضاً للتعبير عن نقطة يبدأ منها فروع ولكن كل منها يرمز إلى حدث أو حالة مستقبلية سوف يواجهها متخذ القرار وتتعلق بالبدائل المتعلقة بحل المشكلة.

وتجدر الإشارة في هذا الصدد أن شجرة القرار يكتب عليها نوعين من المعلومات وهما النتائج المترتبة على كل بديل، واحتمالات حدوث الحالات المستقبلية المحتملة.

وكذلك يتم حساب القيم النقدية المتوقعة للبدائل من خلال ضرب قيم العوائد في احتمالاتها.

وتجدر الإشارة كذلك إلى أن أسلوب شجرة القرار يستخدم لحل المشاكل التي تحتوى على قرار واحد، وكذلك حل المشاكل التي تحتوى على قرارين ويكون القرار الثانى معتمداً على القرار الأول وتسمى هذه الحالة بحالة المواقف أو القرارات المتتابعة.

مثال (7): يفكر مجموعة من المستثمرين في بناء مصنع للطاقة الشمسية ونظراً لضخامة حجم الاستثمار قام المستثمرون بإجراء دراسة للمشروع قبل القيام به، وتكلفت تلك الدراسة 20000 جنيه، وقد تكون نتائج الدراسة ناجحة أو فاشلة. وهناك ثلاثة بدائل أمام المستثمرين وهى: بناء مصنع كبير أو بناء مصنع صغير أو عدم بناء مصنع. فإذا علمت أن الأرباح المتوقعة فى ظل بناء المصنع الصغير 120000 جنيه، وفى ظل بناء المصنع الكبير 180000 جنيه وذلك إذا كان السوق مشجعاً. أما إذا كان السوق غير مشجع فسوف تحدث خسارة قدرها 60000 جنيه فى حالة بناء المصنع الكبير، وخسارة قدرها 40000 جنيه فى حالة بناء المصنع الصغير. فإذا علمت أن السوق يمكن أن يكون مشجع باحتمال قدرة 40%، والدراسة احتمال أن تكون ناجحة باحتمال قدرة 90% إذا كان السوق مشجع، واحتمال أن تكون الدراسة فاشلة فى ظل سوق غير مشجع باحتمال قدرة 80%.



**المطلوب:** تحديد البديل الأمثل باستخدام أسلوب شجرة القرار.

### الحل

لاحظ أن المشكلة السابقة هي مشكلة القرارات المتتابة وذلك لأنه لا بد من اتخاذ قرارين متتابعين " القرار الثانى يعتمد على القرار الأول " وكل قرار له بدائل وله حالات مستقبلية.

\* **القرار الأول:** هل يتم القيام بالدراسة أم لا، حيث يوجد بديلين هنا وهما: إجراء الدراسة أو عدم إجراء الدراسة وهل ستكون الدراسة ناجحة أو فاشلة فى حالة إجراء الدراسة.

\* **القرار الثانى:** قرار الاستثمار (بناء مصنع كبير، بناء مصنع صغير، عدم بناء المصنع) ويتوقف ذلك على القرار الأول نتائج الدراسة وما إذا كانت ناجحة أو فاشلة.

ونظراً لتعقد عملية اتخاذ القرار فنحن لا نتعامل مع الاحتمالات البسيطة بل نتعامل مع ما يعرف بالاحتمالات الشرطية Conditional Probabilities وهى التى تتعلق بنتائج الحالات المحتمل مواجهتها بواسطة الشركة (سوق مشجع أو غير مشجع وذلك إذا كانت نتائج الدراسة ناجحة أو فاشلة). فاحتمال وجود سوق مشجع أو غير مشجع يتوقف الآن على نتائج الدراسة وما إذا كانت ناجحة أو فاشلة.

**خطوات حل المشكلة باستخدام شجرة القرار فى حالة وجود قرارين (فى حالة القرارات المتتابة)**

1- قراءة المشكلة جيداً واستخراج جدول القرار (العوائد المتوقعة).

2- استخراج جدول الاحتمالات المشروطة السابقة.

3- احتساب الاحتمالات المعدلة وذلك على خطوتين:

أ- حساب الاحتمالات الكلية.

ب- حساب الاحتمالات المعدلة.

4- بعد تجهيز الاحتمالات المعدلة يتم البدء في رسم شجرة القرار والآن دعنا نطبق تلك الخطوات على المثال الحالي:

أولاً: حساب الاحتمالات المعدلة لحالات السوق (مشجع أو غير مشجع):  
أ- يتم اعداد الاحتمالات الشرطية كما وردت في المشكلة:

الحالات المستقبلية المتوقعة	الاحتمالات	نتائج الدراسة	
		ناجحة	فاشلة
سوق مشجع	0.4	0.9	0.1
سوق غير مشجع	0.6	0.2	0.8

ب- يتم حساب الاحتمالات الكلية لنتائج الدراسة كما يلي:

\* الاحتمال الكلي لنتائج الدراسة الناجحة

$$0.48 = (0.6 \times 0.2) + (0.4 \times 0.9) =$$

\* الاحتمال الكلي لنتائج الدراسة الفاشلة

$$0.52 = (0.6 \times 0.8) + (0.4 \times 0.1) =$$

لاحظ عزيزي القارئ أن مجموع الاحتمالات الكلية لنتائج الدراسة (ناجحة وفاشلة) لابد وأن يساوي الواحد الصحيح، أي أن

$$1 = 0.52 + 0.48 =$$

لاحظ أن احتمال أن الدراسة ناجحة = 0.48 ، واحتمال أنها فاشلة = 0.52

ج- حساب الاحتمالات المعدلة لكل حالة من حالات السوق في ظل نتائج الدراسة:

- في ظل نتائج الدراسة الناجحة

$$\text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع} = \frac{\text{ح (ناجحة في سوق مشجع)} \times \text{ح (سوق مشجع)}}{\text{ح (الكلي لنتائج الدراسة الناجحة)}}$$



$$0.75 = \frac{0.4 \times 0.9}{0.48} = \text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع}$$

$$0.25 = \frac{0.6 \times 0.2}{0.48} = \text{الاحتمال المعدل لحالة سوق غير مشجع}$$

أى أن ح (احتمال) دراسة ناجحة / سوق مشجع = 0.75

ح (احتمال) دراسة ناجحة / سوق غير مشجع = 0.25

لاحظ أن مجموع الاحتمالات المعدلة لحالات السوق مشجع وغير مشجع في

ظل نتائج الدراسة الناجحة = الواحد الصحيح أى  $1 = 0.25 + 0.75$

- في ظل نتائج الدراسة الفاشلة

$$0.077 = \frac{0.4 \times 0.1}{0.52} = \text{الاحتمال المعدل لحالة سوق مشجع}$$

$$0.923 = \frac{0.6 \times 0.8}{0.52} = \text{الاحتمال المعدل لحالة سوق غير مشجع}$$

أى أن ح (احتمال) دراسة فاشلة / سوق مشجع = 0.077

ح (احتمال) دراسة فاشلة / سوق غير مشجع = 0.923

لاحظ أن مجموع الاحتمالات المعدلة أيضاً = الواحد الصحيح.

- اعداد ملخص لما سبق احتسابه من احتمالات معدلة

الحالات	نتائج الدراسة	ناجحة (0.48)	فاشلة (0.52)
سوق مشجع	0.75	0.077	
سوق غير مشجع	0.25		0.923

ثانياً: نبدأ في رسم شجرة القرار، حيث نبدأ أولاً في رسم قرار الدراسة (القرار الأول) ثم بعد ذلك نرسم القرار الثاني.

- القرار الأول: يتمثل في القيام بالدراسة أو عدم القيام بالدراسة في ظل حالتين وهما: الدراسة ناجحة أو فاشلة مع ملاحظة أن تكلفة الدراسة = 20000 جنيه.

- القرار الثاني: هو اختيار بديل من ثلاثة بدائل وهما:

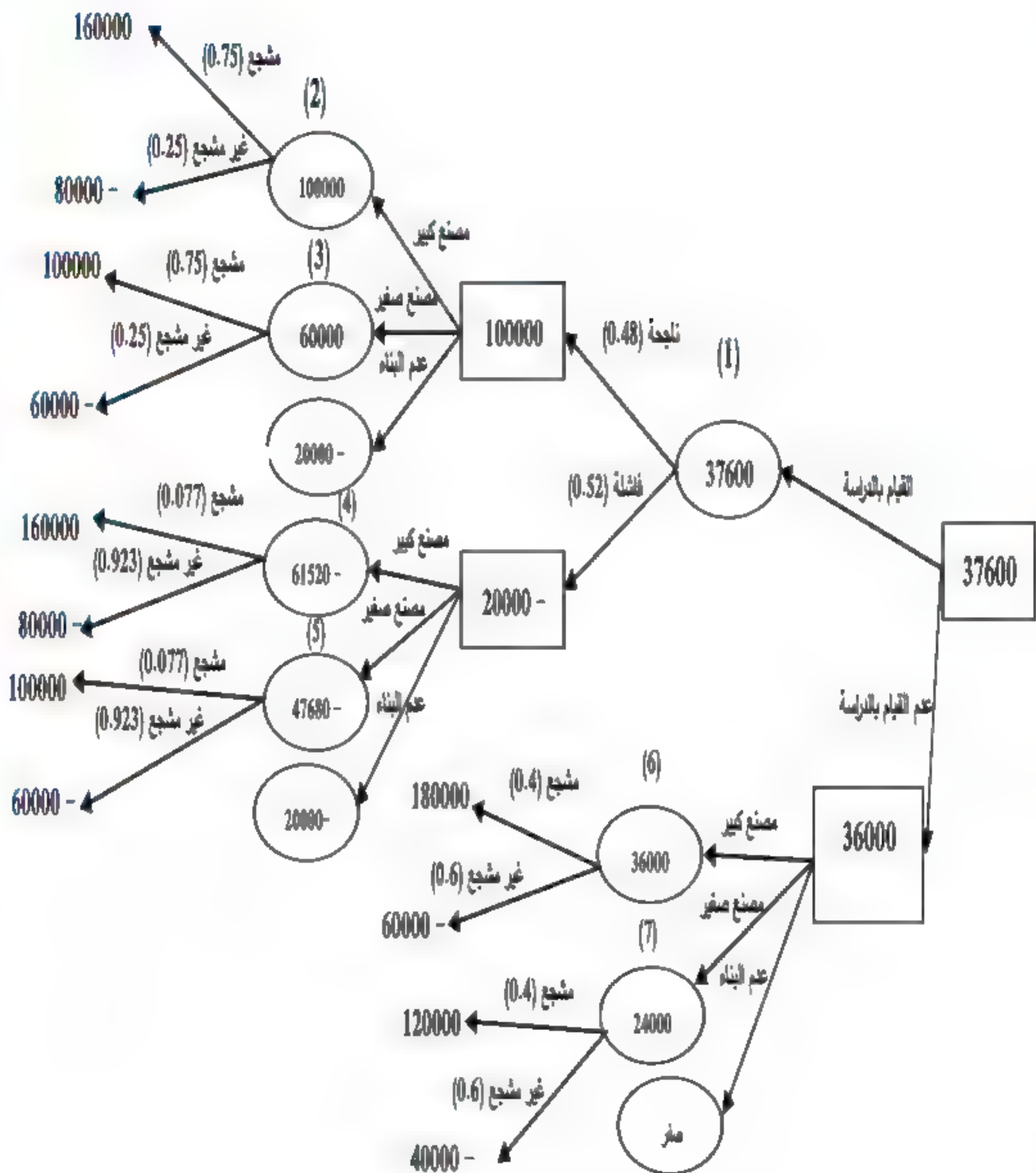
بناء مصنع كبير، أو بناء مصنع صغير أو عدم البناء، في ظل حالتين للسوق هما: سوق مشجع أو غير مشجع ويتمثل جدول العوائد المتوقعة الخاص بالمشكلة فيما يلي:

الحالات المستقبلية البدائل	سوق مشجع	سوق غير مشجع
بناء مصنع كبير	180000	60000 -
بناء مصنع صغير	120000	40000 -
عدم بناء المصنع	صفر	صفر
الاحتمالات	0.4	0.6

لاحظ عند رسم شجرة القرار أن كل فرع خارج من بديل القيام بالدراسة نستخدم الاحتمالات المعدلة لحالتى السوق مشجع أو غير مشجع التى سبق حسابها، والعائد لابد أن نطرح منه تكلفة الدراسة كما هو مبين على الشجرة.

وكل فرع خارج من بديل عدم القيام بالدراسة نستخدم الاحتمالات الأصلية لحالات السوق (مشجع 0.4) ، وغير مشجع (0.6) ويتم استخدام العائد المتوقع بالكامل.





تم حساب القيم المتوقعة على الشجرة كما يلي:

الحدث (2):  $(0.75 \times 160000) + (-0.25 \times 80000) = 100000$  جنيه.

الحدث (3):  $(0.75 \times 100000) + (-0.25 \times 60000) = 60000$  جنيه.

الحدث (4):  $(0.077 \times 160000) + (-0.923 \times 80.000) = 61520$  جنيه.

الحدث (5):  $(0.077 \times 100000) + (-0.923 \times 60000) = 47680$  جنيه.

الحدث (6):  $(0.4 \times 180000) + (-0.6 \times 60000) = 36000$  جنيه.

الحدث (7):  $(0.4 \times 120000) + (-0.6 \times 40000) = 24000$  جنيه.

الحدث (1):  $(0.48 \times 100000) + (-0.52 \times 20000) = 37600$  جنيه.

وبناء على رسم شجرة القرار فإن القرارات تتمثل فيما يلي:

القرار الأول: هو القيام بالدراسة لأنه البديل صاحب أكبر قيمة نقدية متوقعة (37600 جنيه) بالمقارنة بالبديل الثاني عدم القيام بالدراسة حيث بلغت القيمة النقدية المتوقعة له (36000 جنيه).

القرار الثاني:

- بناء مصنع كبير لو كانت الدراسة ناجحة لأن بديل بناء مصنع كبير بلغت القيمة النقدية المتوقعة له (100000 جنيه)، وهي أكبر من القيمة المتوقعة في حالة بناء مصنع صغير (60000 جنيه).
- عدم بناء مصنع لو كانت الدراسة فاشلة لأنه يحقق أقل قيمة للخسارة 20000 جنيه.



## تمارين علي الفصل السابع

تمرين (1): يعبر جدول العوائد التالي عن الربح المحقق في ظل ثلاثة بدائل وأربع حالات متوقعة للطبيعة:

ط <sub>4</sub>	ط <sub>3</sub>	ط <sub>2</sub>	ط <sub>1</sub>	حالات الطبيعة البدائل
30	45	45	75	البديل الأول
20	40	60	120	البديل الثاني
20	35	90	125	البديل الثالث

المطلوب: تحديد البديل الأمثل في ظل:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
  - 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).
  - 3- معيار الاحتمالات المتساوية.
  - 4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية  $\alpha = 0.8$ .
  - 5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).
- تمرين (2): لو أن متخذ القرار يواجه أربعة بدائل وأربع حالات مستقبلية متوقعة، وقد استطاع أن ينمي جدول الأرباح المتوقعة كما يلي:

ح <sub>4</sub>	ح <sub>3</sub>	ح <sub>2</sub>	ح <sub>1</sub>	الحالات المستقبلية البدائل
15	30	27	42	البديل الأول
21	24	30	33	البديل الثاني
33	30	30	27	البديل الثالث
39	33	30	24	البديل الرابع

المطلوب: أ- إذا كان متخذ القرار لا يعرف ما هي احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية فما هو البديل الأمثل في ظل:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).
- 3- معيار الاحتمالات المتساوية.

ب- بفرض أن الجدول السابق يعكس تكلفة بدلاً من الربح فما هو البديل الأمثل في ظل:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار الاحتمالات المتساوية.
- 3- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

تمرين (3): يعبر جدول العوائد التالي عن الربح المحقق في ظل خمسة بدائل و خمسة حالات متوقعة للطبيعة:

حالات الطبيعة البدائل	1 ن	2 ن	3 ن	4 ن	5 ن
(1)	40	40	40	40	40
(2)	25	- 10	50	50	50
(3)	- 60	صفر	60	60	60
(4)	- 110	- 50	10	70	70
(5)	- 160	- 100	- 45	20	80

المطلوب:

(أ) إذا كان متخذ القرار لا يعرف ما هي احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية فما هو البديل الأمثل في ظل:

- 1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).
- 2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).
- 3- معيار الاحتمالات المتساوية.



4- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية  $\infty = 0.6$

5- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

ب- بفرض أن الأرقام في الجدول السابق تعكس تكلفة بدلاً من الربح، فما هو القرار الأمثل في ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الاحتمالات المتساوية.

4- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (4): بفرض أن متخذ القرار في التمرين رقم (2) قد استطاع تحديد احتمالات حدوث الحالات المستقبلية وكانت كما يلي: (0.50 ، 0.20 ، 0.20 ، 0.10) على التوالي.

المطلوب:

1- باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ما هو البديل الأمثل.

2- بفرض أن الأرقام داخل الجدول (في تمرين 2) تعكس تكلفة بدلاً من ربح استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع في تحديد البديل الأمثل.

3- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

تمرين (5): يعبر جدول العوائد التالي عن الربح المحقق بالجنيه في ظل أربعة بدائل وأربعة حالات متوقعة للطبيعة واحتمالات حدوثها

حالات الطبيعة البدائل	١ع	٢ع	٣ع	٤ع
(1)	200	200	200	200
(2)	194	210	210	210
(3)	188	204	220	220
(4)	182	198	214	230
الاحتمالات	0.20	0.40	0.30	0.10

**المطلوب:**

- أ- استخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع في تحديد البديل الأمثل.  
 ب- استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة في تحديد البديل الأمثل.  
 ج- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

**تمرين (6):** يفكر مدير إحدى محلات الأجهزة الكهربائية في تقديم جهاز كهربائي جديد، والمشكلة التي تواجهه هي تحديد عدد الوحدات التي يجب أن يطلبها من المستورد الرئيسي لهذا الجهاز. وكان سعر شراء الجهاز هو 440 جنيه وسعر بيعه هو 600 جنيه. ولكن المشكلة التي تواجه مدير المحلات هي عدم التأكد من كيفية التصرف في الوحدات غير المباعة، حيث أنه سوف يضطر إلى التخلص منها بخصم 50% من سعر بيعها، ومن ناحية أخرى إذا جاء أحد العملاء ليطلب جهازاً ولم يجده فإن المحل يقدر تكلفة فقد فرصة بيعية بـ 50 جنيه. وفي ضوء خبرات هذا المدير فإنه استطاع أن يقدر احتمالات بيع عدد (صفر، 1، 2، 3) وحدات بمقدار 0.30 ، 0.40 ، 0.20 ، 0.10 على التوالي.

**المطلوب:**

- 1- تحديد أفضل عدد من الوحدات تتصح به المدير لشراؤه باستخدام:



أ- طريقة القيمة أو العائد المتوقع.

ب- طريقة خسارة الفرصة البديلة.

2- حدد قيمة المعلومات الكاملة.

3- إذا لم يستطيع المدير تقدير احتمالات البيع فما هو عدد الوحدات التي تنصح المدير بشراؤه باستخدام معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (7): لو أن متخذ القرار يواجه ثلاثة بدائل وثلاث حالات مستقبلية متوقعة وقد استطاع أن ينمى جدول الأرباح المتوقعة كما يلي (القيمة بالجنيه):

الحالات المستقبلية المتوقعة بدائل الاستثمار	انخفاض سعر الفائدة	ثبات سعر الفائدة	زيادة سعر الفائدة
البديل الأول	160	224	128
البديل الثاني	176	112	256
البديل الثالث	48	192	224

المطلوب:

أ- إذا كان متخذ القرار لا يعرف ما هي احتمالات حدوث هذه الحالات المستقبلية، فما هو البديل الأمثل في ظل:

1- معيار أقصى الأقصى (المتفائل).

2- معيار أقصى الأدنى (المتشائم).

3- معيار الواقعية إذا كانت قيمة معامل الواقعية  $\alpha = 0.7$ .

4- معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

ب- بفرض أن الجدول السابق يعكس تكلفة بدلاً من ربح فما هو البديل الأمثل في ظل معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى).

تمرين (8): بفرض أن متخذ القرار في التمرين (رقم 7) قد استطاع تحديد احتمالات حدوث الحالات المستقبلية الثلاثة وكانت على التوالي كما يلي: 0.40 ، 0.30 ، 0.30.

المطلوب:

1- استخدام طريقة خسارة الفرصة البديلة في تحديد ماهو البديل الأمثل.

2- تحديد قيمة المعلومات الكاملة.

تمرين (9): يعبر الجدول التالي عن الأرباح المتوقعة لإحدى المشكلات التي يتوافر فيها ثلاثة بدائل وحالتين للطبيعة:

س2	س1	الحالات المستقبلية البدائل
150	240	البديل الأول
255	195	البديل الثاني
300	90	البديل الثالث

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لإيجاد قيم الاحتمالات وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.

تمرين (10): إذا توافرت لديك البيانات التالية (الربح بالجنيه):

كساد	رواج	حالات الطبيعة البدائل
60000	90000	س1
72000	60000	س2
120000	48000	س3

المطلوب: استخدم مدخل تحليل الحساسية لإيجاد قيم الاحتمالات لكل حالة من حالات الطبيعة وبيان تأثير أى تغيير فيها على القرار المتخذ.



**تمرين (11):** تفاضل شركة "أحمد محمود" بين شراء مكونات الإنتاج من الموردين في السوق أو القيام بتصنيعها بنفسها داخل مصانعها. وإذا كان الطلب على المنتج الخاص بالشركة عالياً فإن الشركة يمكن أن تحقق ربحاً من وراء عملية تصنيع مكونات الإنتاج، ولكن إذا كان الطلب على المنتج ذاته منخفضاً فإن تكلفة تصنيع المكونات ستكون عالية مقارنة بشرائها من الموردين. ويعبر الجدول التالي عن العوائد المتوقعة (بالآلاف جنيه) وذلك في ظل البديلين (الشراء أو التصنيع):

حالات الطلب البدايل	منخفض	متوسط	عالي
تصنيع المكونات	20 -	45	100
شراء المكونات	10	45	70

فإذا علمت أن احتمالات الطلب كما يلي: المنخفض = 0.35 ، والمتوسط = 0.35 ، والعالي = 0.30.

- (1) باستخدام طريقة القيمة أو العائد المتوقع ماهو القرار الأفضل للشركة.
- (2) ما هي قيمة المعلومات الكاملة لهذه المشكلة؟
- (3) إذا علمت أن الشركة قد قررت إجراء دراسة للسوق وأن الدراسة يمكن أن تكون ناجحة أو فاشلة، كما أن الاحتمالات المتوقعة في ظل نتائج الدراسة وحالات الطلب كما يلي:

حالات الطلب	نتائج الدراسة	
	الدراسة ناجحة	الدراسة فاشلة
منخفض	0.10	0.90
متوسط	0.40	0.60
عالي	0.60	0.40

قم بحساب الاحتمالات المعدلة لحالات الطلب في ظل نتائج الدراسة.  
(4) قم برسم شجرة القرار للمشكلة، ثم قم بتحديد القرار الأمثل للمشكلة على الشجرة (ملحوظة اظهر كل عملياتك الحسابية على الشجرة في مكان منفصل وخارج الشجرة ولن ينظر إلى الأرقام على الشجرة وحدها ولكن إلى طريقة حسابها خارج الشجرة).

**تمرين (12):** يواجه مدير محل متخصص في بيع الورد مشكلة تحديد أعداد الورد البلدي التي يطلبها يومياً، حيث يمكن أن يبيع يومياً إما 1000 أو 1500 أو 2000 أو 2500 من هذا الورد على حسب المناسبات، ويشترى هذا المحل الورد بسعر 2 جنيه ويبيعها بسعر 3 جنيه. والمشكلة أن الورد التي لا تباع في نفس اليوم لا تصلح للبيع في الأيام التالية وبالتالي فإن المحل يتخلص منها. والمطلوب مساعدة مدير المحل على تحديد الكمية المثلى للشراء يومياً والتي تعظم أرباحه من خلال:

- 1- تكوين جدول القرار (العوائد لهذه المشكلة).
- 2- ما هو القرار الأمثل في حالة ما إذا كان هذا المدير متفائلاً، ومتشائماً؟
- 3- ما هو القرار الأمثل في حالة تطبيق معيار الأسف أو الندم (معيار أدنى الأقصى)؟
- 4- إذا كانت احتمالات الطلب متساوية فهل يمكنك تمثيل هذه المشكلة في شكل شجرة القرار؟ وما هو القرار الأمثل في هذه الحالة؟
- 5- ما هي قيمة المعلومات الكاملة لهذا القرار؟

**تمرين (13):** تخطط إحدى الشركات لإنتاج كريم جديد لعلاج قشرة الشعر، ووفقاً للتقديرات التي أعدتها الشركة فإن ربح الوحدة المتوقع هو 10 جنيهات ويتطلب إنتاج هذا المنتج استثمار قدره 500000 جنيه وتتمثل حالات الطلب المتوقعة في المستقبل واحتمالاتها كما يلي:



70000	60000	50000	40000	30000	حالات الطلب المحتملة
وحدة	وحدة	وحدة	وحدة	وحدة	
%35	%30	%20	%10	%5	الاحتمال

المطلوب:

- 1- هل ينبغي على الشركة أن تقوم بإنتاج وتقديم هذا المنتج الجديد؟
- 2- هل يمكنك رسم شجرة القرار لهذه المشكلة؟ كيف؟
- 3- ما هي قيمة المعلومات الكاملة لهذه الشركة؟

## الفصل الثامن

### نظرية المباريات

### Games Theory

- مقدمة.
- مفهوم نظرية المباريات.
- القيود المفروضة على استخدام نظرية المباريات.
- المفاهيم الأساسية التي يجب أخذها في الحسبان عند تطبيق نظرية المباريات.
- خصائص نظرية المباريات.
- أنواع المباريات.
- خطوات تطبيق نظرية المباريات.
- نماذج نظرية المباريات:
  - النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية.
  - النوع الثاني: المباريات ذات الإستراتيجية المختلطة.
- طرق حل المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة.
  - الطريقة الأولى: الطريقة الجبرية.
  - الطريقة الثانية: الطريقة الحسابية.
  - الطريقة الثالثة: طريقة الاحتمالات المشتركة.
  - الطريقة الرابعة: طريقة المباريات الفرعية.
- مفهوم قاعدة السيطرة (الحذف).
- تمارين للتدريب.



## نظرية المباريات

### مقدمة:

ترجع النشأة الأولى لنظرية المباريات إلى العالم الفرنسي "جون نيومان" Von Neuman عندما أكتشفها وصاغ أفكارها النظرية في عام (1928)، كما أنه من الناحية التطبيقية فقد جاءت المحاولة الأولى لتطبيقها من هذا العالم أيضاً، حيث قام بتطبيقها في عام (1933) في المجال الاقتصادي عندما قام بدراسة وتحليل المشكلات الخاصة بالاحتكار الثنائي والمتعدد.

وعلى الرغم من ذلك فإن نظرية المباريات لم تلقى الاهتمام الكافي ولم تستخدم بشكل واسع إلا بعد الحرب العالمية الثانية، وبالتحديد في عام (1944) عندما تم عرضها في كتاب كل من "جون نيومان وأوسكار مورجينسترن" تحت عنوان "نظرية وتطبيق المباريات والسلوك الاقتصادي" The Theory and Practice of Games and Economic Behavior والذي قدما من خلاله منهجاً جديداً لحل العديد من المشكلات الناتجة عن التنافس أو الصراع بين عدة أطراف بحيث يحاول كل طرف أن ينهي هذا التنافس أو الصراع لصالحه.

وقد أدى هذا الكتاب بما فيه من فكر وتطبيق إلى انتشار نظرية المباريات حيث تم تطبيقها في العديد من المجالات، وخاصة مجال الإدارة الهندسية وذلك لتقدير مدى النجاح في المنافسة بين شركتين متنافستين في الأسواق عن طريق استخدام الأساليب الرياضية المتطورة لتحديد أفضل إستراتيجية تعظم العائد أو تقلل الخسائر إلى أقصى قدر ممكن.

فمن المعلوم أن أي منظمة لا تعمل في فراغ، ولكنها تعمل في بيئة متغيرة تؤثر فيها وتتأثر بها، وتحتوى البيئة المحيطة بأى منظمة على عدة متغيرات اقتصادية واجتماعية وسياسية بالإضافة إلى عوامل الخطر وعدم التأكد.

وقد ساهمت المتغيرات السابقة في صعوبة وتحديد عملية اتخاذ القرارات، حيث أصبحت تلك العملية أكثر تعقيداً عن ذي قبل. ولهذا فإن عملية اتخاذ القرار تتطلب ضرورة الاعتماد على أسلوب يمكن من اتخاذ القرارات في المواقف التي تتسم بالصراع، ومن ثم أصبحت العملية الإدارية كمباراة بين طرفين أو أكثر أحدهما متخذ القرار والباقي (طرف أو عدة أطراف) بمثابة خصوم لمتخذ القرار وتعتبر نظرية المباريات من الأساليب التي تساهم في ترشيد القرارات في الحالات التي يحدث فيها تعارض مصالح.

### مفهوم نظرية المباريات:

نظرية المباريات هي عبارة عن تكتيك يستخدم عند الرغبة في اتخاذ القرارات التي تتطلب أخذ إستراتيجيات الأطراف الأخرى ذوى المصالح المتعارضة في الاعتبار.

وينظر البعض لنظرية المباريات على أنها وسيلة حديثة لدراسة اتخاذ القرارات في حالة المواقف التي تتميز بالصراع، وينشأ الصراع أساساً في حالة اختلاف أهداف الأطراف المتنافسة في الموقف المعين. أى أن نظرية المباريات ما هي إلا أداة من الأدوات الرياضية التي تساهم بشكل كفاء وفعال في حل المشكلات التي تواجه متخذى القرارات وذلك عند قيامهم بالبحث عن الإستراتيجيات المثلى سواء كانت إستراتيجيات الخصم معروفة لديهم أو غير معروفة.

وترجع صعوبة اتخاذ القرارات في حالة المباراة، إلى أن كل من أطراف المباراة يريد تعظيم العائد (النتائج) لنفسه، وإلى أن القرار الذى يتخذه أحد أطراف المباراة يؤثر على الطرف الآخر، لذلك فعلى متخذ القرار أن يضع في اعتباره رد الفعل الذى سيحدثه قراره على الطرف الآخر واحتمالات الأفعال التي سيقوم بها الطرف الآخر كنتيجة للقرار الذى اتخذه الطرف الأول.

ويتم استخدام نظرية المباريات في ظل قيود مفروضة عليها تتمثل فيما يلي:



- 1- ضرورة وجود هدف محدد لكل طرف من أطراف المباراة.
- 2- وجود عدد محدود من المشاركين في المباراة.
- 3- يتاح لكل طرف في المباراة عدد محدود من الإستراتيجيات.
- 4- تكون إستراتيجيات الأطراف المشاركة في المباراة مدروسة وقابلة للتطبيق.
- 5- يوجد عائد لكل إستراتيجية مستخدمة في المباراة.
- 6- يعرف كل طرف مشترك في المباراة إستراتيجيات الأطراف الأخرى المشاركة في هذه المباراة، ولكنه لا يعرف ما يستخدم منها.

المفاهيم الأساسية التي يجب أخذها في الحسبان عند تطبيق نظرية المباريات:

### (1) المباريات Games

تدل كلمة المباريات في عرض نظرية المباريات على وصف الأوضاع التي تعبر عن وجود صراع أو تعارض في التفضيلات من نوع لآخر، حيث يقصد بالمباراة وجود صراع أو نزاع بين طرفين أو عدة أطراف، بحيث يسعى كل طرف إلى إنهاء هذا الصراع أو النزاع لصالحه عن طريق الفوز على منافسيه باستخدام كل المعلومات المتوفرة لديه أو لدى منافسيه، وذلك عن طريق استخدام التفكير المنطقي والأساليب الرياضية وصولاً إلى تحقيق أفضل إستراتيجية تحقق الفوز على الطرف أو الأطراف الأخرى، بحيث يتحقق في النهاية إما تعظيم الأرباح أو تقليل الخسائر إلى أقل قدر ممكن.

وقد يكون المشترك في المباراة شخصاً طبيعياً فرداً، أو فريقاً يتكون من الأفراد الطبيعيين، كما قد يكون من الأشخاص ذات الصفة الاعتبارية كما في حالة التنافس بين منظمات الأعمال. وتجدر الإشارة أنه توجد لكل مباراة قواعد خاصة بها وإجراءات وافتراضات تقوم على أساسها.

(2) الإستراتيجية: تشمل الإستراتيجية مجموعة من البرامج التي تستخدم لتحقيق أهداف طرف معين من أطراف المباراة وذلك بغية إما تعظيم ربحه أو

تدنية خسائره. فكل طرف (لاعب) مجموعة من الإستراتيجيات يتعامل بها ومن خلالها فى ضوء استراتيجيات اللاعب الأخر، ومن خلال العوامل التى يسيطر عليها كل لاعب، والقيمة التى يعطيها اللاعبون لكل نتيجة.

(3) **عائد الاستراتيجية:** يمثل عائد الإستراتيجية العائد الصافى الذى تحققه استراتيجية معينة. وكمثال إذا كان هدف الإستراتيجية هو زيادة عدد الوحدات المباعة أو زيادة عدد الوحدات المنتجة فإن عائد الإستراتيجية يتمثل فى عدد الوحدات المباعة أو المنتجة التى يمكن تحقيقها بعد تنفيذ الإستراتيجية. أما إذا كان هدف الإستراتيجية هو تعظيم الربح فإنه يتم قياس عائد الإستراتيجية بمقدار ما يتم تحقيقه من ربح بعد تنفيذ الإستراتيجية.

(4) **نتائج المباراة:** وهى النتائج المترتبة على تفاعل إستراتيجيات أطراف المباراة، حيث يمكن القول بأن نتيجة المباراة بالنسبة لأى لاعب تتوقف على نوع الإستراتيجية التى اتبعها هو، بالإضافة إلى الإستراتيجيات التى اتبعها المنافسون.

(5) **مصفوفة عوائد الاستراتيجية:** تمثل مصفوفة عوائد الإستراتيجية مجموعة العوائد التى يمكن لطرف معين أو لاعب معين أن يحققها فى ظل استخدام مختلف التوليفات من الإستراتيجيات الممكنة وذلك لمقابلة إستراتيجيات الطرف أو اللاعب الأخر.

#### خصائص نظرية المباريات:

- 1- تتكون المباراة من عدد من اللاعبين (مباراة الطرفين، المباراة متعددة الأطراف).
- 2- يسيطر كل لاعب على مجموعة من الإستراتيجيات (مباريات ذات إستراتيجية، ومباريات متعددة الإستراتيجيات).



3- لكل لاعب دالة تفضيل تتأثر بأنواع الإستراتيجيات التي يتبعها اللاعبون في المباراة.

4- هدف كل لاعب هو الحصول على أعلى عائد يتيح له قيمة عظمى من المباراة.

### أنواع المباريات:

يمكن تصنيف المباريات اعتماداً على مجموعة من المعايير وهي:

#### 1- من حيث عدد اللاعبين:

أ- المباراة ذات الطرفين: عدد المتنافسين إثنين فقط.

ب- المباراة متعددة الأطراف: المباراة بين أكثر من طرفين، حيث يزيد عدد المتنافسين عن اثنين.

2- من حيث عدد الإستراتيجيات: يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من أنواع المباريات استناداً لعدد الإستراتيجيات حيث هناك:

أ- مباراة ذات إستراتيجيتين.

ب- مباراة متعددة الإستراتيجيات.

#### 3- من حيث درجة الصراع أو النتيجة النهائية للمباراة:

يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من المباريات استناداً إلى درجة الصراع أو النتيجة النهائية للمباراة وهي:

أ- مباراة تامة الصراع ذات المجموع الصفري:

وهي المباراة التي يكون المجموع الجبري لمكسب وخسارة الطرفين يساوي الصفر، وبالتالي فإن مكسب أحد اللاعبين يعد في نفس الوقت خسارة للاعب الآخر، حيث يسعى كل طرف من أطراف المباراة إلى تعظيم مكاسبه إلى أقصى قدر ممكن، أو تنذية خسارته إلى أقل قدر ممكن.

ب- مباراة غير تامة الصراع ذات مجموع غير صفري:

وهي المباراة التي يكون فيها مكسب أحد الأطراف أكبر أو أقل من خسارة الطرف الآخر.

4- من حيث التوازن: يمكن تصنيف المباريات حسب التوازن إلى نوعين هما:

أ- مباراة متوازنة ذات إستراتيجية واحدة: لكل لاعب فيها إستراتيجية مثلى واحدة ونقطة توازن يرتضيها الطرفان.

ب- مباراة غير متوازنة ذات إستراتيجيات مختلطة: حيث يستخدم كل طرف أكثر من إستراتيجية نظراً لعدم وجود نقطة توازن يرتضيها الطرفان.

والجدير بالذكر أن المباراة قد تأخذ خليط من بين هذه الأنواع معاً، فمثلاً قد تكون المباراة ذات طرفين وتامة الصراع (ذات مجموع صفري) وذات إستراتيجيتين ومتوازنة، أو مباراة ذات طرفين وتامة الصراع ومتعددة الإستراتيجيات وغير متوازنة ..... وهكذا .....

### خطوات تطبيق نظرية المباريات:

1- اعداد مصفوفة العوائد لكل طرف في المباراة.

2- البحث عن الإستراتيجية الأفضل لكل طرف.

3- الوصول إلى قيمة المباراة.

### نماذج نظرية المباريات:

يتم التركيز في هذا الكتاب على دراسة وتحليل نماذج المباريات تامة الصراع ذات المجموع الصفري وتنقسم هذه المباريات طبقاً للإستراتيجيات التي يستخدمها كل طرف لتحقيق هدفه - سواء كان أقصى مكسب أو أدنى خسارة - إلى نوعين أساسيين وهما:

النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية.

النوع الثاني: المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة.



ونتناول فيما يلي هذين النوعين من المباريات ذات المجموع الصفري تامة الصراع.

### النوع الأول: المباريات ذات الإستراتيجية الصافية: Pure Strategy Games

طبقاً لهذا النوع من المباريات يكون أمام كل طرف إستراتيجية واحدة مثلى من بين عدة إستراتيجيات متاحة يلعب بها خلال زمن المباراة من أجل تحقيق إما أقصى عائد أو أقل خسارة.

ومما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أن الخطوة الأولى لتطبيق نظرية المباريات هي اعداد مصفوفة العوائد معبراً عنها في صورة رقمية تمثل العائد لكل طرف.

فمثلاً بافتراض وجود لاعبين هما (س ، ص) وتعتبر (س1 ، ص2) عن إستراتيجيات اللاعب الأول (س)، وتعتبر (ص1 ، ص2) عن إستراتيجيات اللاعب الثانى (ص). وفيما يلي مصفوفة العوائد للمباراة بينهما:

استراتيجيات اللاعب ص			
ص2	ص1		
28	8	س1	استراتيجيات اللاعب س
16-	24	س2	

ويلاحظ على مصفوفة العوائد ما يلي:

- 1- الصفوف تمثل إستراتيجيات اللاعب (الطرف) الأول، بينما تمثل الأعمدة إستراتيجيات الطرف (اللاعب) الثانى.
- 2- لابد أن يكون لكل طرف أكثر من إستراتيجية يمكنه الاختيار من بينها بما يحقق هدفه من المباراة.

3- تمثل الأرقام الموجبة في المصفوفة مكاسب أو عوائد الطرف (اللاعب) الأول وتعتبر في نفس الوقت خسائر للطرف (اللاعب) الثاني.

4- تمثل الأرقام السالبة في المصفوفة خسائر للطرف (اللاعب) الأول وتعتبر في نفس الوقت عوائد أو مكاسب للطرف (اللاعب) الثاني.

وفيما يلي شرح للأرقام الموجودة في مصفوفة العوائد السابق عرضها:

يحقق اللاعب الأول (س) مكسباً قدره (8) إذا اتبع الإستراتيجية (س<sub>1</sub>) وفي نفس الوقت اتبع اللاعب الثاني (ص) الإستراتيجية (ص<sub>1</sub>)، في حين يحقق اللاعب الثاني (ص) خسارة قدرها (-8) إذا اتبع الإستراتيجية (ص<sub>1</sub>) وفي نفس الوقت اتبع اللاعب الأول (س) الإستراتيجية (س<sub>1</sub>)، لذا سوف يحاول اللاعب الأول (س) تعظيم عوائده، في حين يحاول اللاعب الثاني (ص) تدنية خسائره.

ويوضح الجدول التالي شرح لمصفوفة عوائد المباراة بين اللاعب الأول (س) واللاعب الثاني (ص).

جدول عوائد المباراة

العائد أو النتائج		إستراتيجيات اللاعب (ص)	إستراتيجيات اللاعب (س)
اللاعب (ص)	اللاعب (س)		
خسارة = -8	مكسب = 8	ص <sub>1</sub>	س <sub>1</sub>
خسارة = -28	مكسب = 28	ص <sub>2</sub>	س <sub>1</sub>
خسارة = -24	مكسب = 24	ص <sub>1</sub>	س <sub>2</sub>
مكسب = 16	خسارة = -16	ص <sub>2</sub>	س <sub>2</sub>

في ضوء عرض مصفوفة العوائد إذا ظهرت مصفوفة العوائد في صورة أرقام موجبة فإنها تكون في صالح الطرف الأول ومتحيزة ضد الطرف الثاني، بينما إذا ظهرت هذه المصفوفة في صورة أرقام سالبة فإنها تكون في صالح الطرف الثاني ومتحيزة ضد الطرف الأول.



ومن خلال تحليل أرقام مصفوفة العوائد فإنه يمكن تحديد نقطة التوازن أو التعادل وهي النقطة التي تنتج من تبني كل طرف من أطراف المباراة للإستراتيجية المثلى التي يستخدمها خلال زمن المباراة. وتتحدد هذه النقطة عند الرقم الذي تتقاطع عنده الإستراتيجية المثلى التي يتبناها الطرف الأول مع الإستراتيجية المثلى التي يتبناها الطرف الثانى.

وبالتالى فإن نقطة التوازن هي النقطة التي يرتاح عندها كل طرف من طرفى المباراة ويرتضيان بنتيجتها، كما أن نقطة التوازن هي التي تحدد قيمة المباراة. وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه يتم استخدام معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى لتمكين كل طرف من طرفى المباراة من اختيار إستراتيجية المثلى له سواء كانت صافية أو مختلطة بحيث يحقق الهدف الذى يسعى إليه سواء تعظيم المكسب أو تدنية الخسارة.

وكقاعدة ثابتة يستخدم دائماً الطرف الأول فى المباراة معيار " أقصى الأدنى"، حيث يتوقع الطرف الأول أسوأ النتائج (أى اختيار أقل قيمة فى كل صف)، ثم يقوم باختيار أفضلها أى تعظيم القيم الدنيا. أما الطرف الثانى فى المباراة فيستخدم دائماً معيار " أدنى الأقصى" حيث يتوقع الطرف الثانى أفضل النتائج (أى اختيار أكبر قيمة فى كل عمود) ثم يقوم باختيار أسوأ النتائج أى تدنية القيم العليا.

فإذا حدث أن تعادلت قيمة معيار " أقصى الأدنى" للطرف الأول معه قيمة معيار " أدنى الأقصى" للطرف الثانى، فإن هذه الحالة تمثل حالة توازن، حيث يكون كل طرف قد حقق هدفه الذى يسعى إليه وتتحدد قيمة المباراة النهائية بالقيمة المشتركة لهما، أما فى حالة عدم تعادل (تساوى) هاتين القيمتين فإن المباراة تكون غير متوازنة (غير مستقرة) وتتحدد قيمتها النهائية فى هذه الحالة بالمتباينة التالية :

أقصى الأدنى  $\leq$  قيمة المباراة  $\leq$  أدنى الأقصى

وعندئذ يتم استخدام العديد من الطرق الخاصة بالإستراتيجيات المختلطة كما سيتم عرضها فيما بعد.

### مقياس الحد الأقصى للحدود الدنيا Minimax Criterion

في النمط المتشائم لصنع القرار، يحاول متخذ القرار إذا كان متشائماً اختيار الحد الأقصى للربح من بين الحدود الدنيا في حالة الربح. أما في حالة الخسارة، يحاول اللاعب اختيار الحد الأدنى للحدود القصوى من الخسائر. ففي ضوء نظرية المباراة يمكن استخدام مقياس الحد الأقصى للحدود الدنيا من الأرباح وذلك بغرض اختيار الإستراتيجيات التي تعمل على تدنية الخسائر لكل لاعب. ويمكن استخدام الطريقة التقليدية "مقياس أقصى الأدنى وأدنى الأقصى في تحديد الإستراتيجيات المثلى في المباريات ذات الإستراتيجية الصافية.

الطريقة التقليدية ( المختصرة ) "مقياس أقصى الأدنى وأدنى الأقصى"

يتم تطبيق الطريقة التقليدية (المختصرة) باتباع الخطوات التالية:

- 1- يتم تحديد أصغر رقم في كل صف (الحد الأدنى للصف).
- 2- ثم يتم اختيار الرقم الأكبر من الأرقام الصغرى التي تم تحديدها في الخطوة السابقة أى تطبيق مقياس " أقصى الأدنى".
- 3- يتم تحديد أكبر رقم في كل عمود (الحد الأقصى للعمود).
- 4- ثم يتم اختيار أصغر رقم من الأرقام الكبرى التي تم تحديدها في الخطوة السابقة أى تطبيق مقياس " أدنى الأقصى".
- 5- إذا تساوت قيمة مقياس أقصى الأدنى مع قيمة مقياس أدنى الأقصى بمعنى تساوت القيمة الأصغر للمباراة مع القيمة الأكبر للمباراة، فإن هذه القيمة تعنى نقطة التوازن (التعادل) للمباراة، وهى فى نفس الوقت تمثل قيمة المباراة. وفيما يلى نوضح كيفية استخدام الطريقة التقليدية (المختصرة) فى تحديد قيمة المباراة.



مثال (1):

فيما يلي مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهي الشركة (أ)، والشركة (ب). والمطلوب تحديد قيمة المباراة، وما هي الإستراتيجيات المثلى لكل شركة ؟

استراتيجيات الشركة (ب)				
ص1	ص2	ص3	ص4	استراتيجيات الشركة (أ)
50	80	16	25	س1
30	5	14	95	س2
70	40	15	30	س3

الحل

يتم تطبيق خطوات تطبيق الطريقة التقليدية (المختصرة) كما يلي:

الشركة (ب)						الشركة (أ)
ص1	ص2	ص3	ص4	أصغر رقم في الصف	الإستراتيجية	
50	80	16	25	16	س1	
30	5	14	95	5	س2	
70	40	15	30	15	س3	
70	80	16	95	أقصى الأدنى (16) أدنى الأقصى (16)	أكبر رقم في العمود	

\* البحث عن الإستراتيجية الأفضل لكل شركة:

\* بالنسبة للشركة (أ):

نجد أسوأ النتائج لإستراتيجيتها الثلاث هي:

(س1) = 16 → أقصى الأدنى

(س2) = 5

$$(س3) = 15$$

∴ وفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى أو المفضلة للشركة (أ)

هي الإستراتيجية (س1) ذات العائد (16)

\* بالنسبة للشركة (ب)

نجد أن أفضل النتائج لإستراتيجيتها الأربع هي:

$$(ص1) = 70$$

$$(ص2) = 80$$

$$(ص3) = 16 \rightarrow \text{أدنى الأقصى}$$

$$(ص4) = 95$$

∴ وفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى (المفضلة) للشركة

(ب) هي الإستراتيجية (ص3) ذات الخسارة (16).

بما أن نتيجة الشركة (أ) = (16)، وهي ذاتها الأفضل للشركة (ب) = (16).

∴ نحن أمام حالة توازن، والنتيجة (16) تمثل نقطة التوازن في المباراة، وعلى

ذلك تكون الإستراتيجية المثلى للشركة (أ) هي الإستراتيجية (س1) (الصف

الأول)، وكذلك تصبح الإستراتيجية المثلى للشركة (ب) هي الإستراتيجية

(ص3) (العمود الثالث).

\* قيمة المباراة: في هذه المباراة ذات المجموع الصفري نجد ما يلي:

إن قيمة المباراة للشركة (أ) هي قيمة أقصى الأدنى = (16)، وأن قيمة المباراة

للشركة (ب) هي قيمة أدنى الأقصى = (16)، وطالما أن أقصى الأدنى

للصفوف يتعادل مع أدنى الأقصى للأعمدة

∴ نقطة التوازن هي (16).

∴ قيمة المباراة للشركة (أ) = (16).

وقيمة المباراة للشركة (ب) = (-16).

والمجموع الجبرى لنتيجة المباراة =  $16 + (-16) = \text{صفر}$



مثال (2): فيما يلي مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الطرفين، الطرف الأول (س)، والطرف الثاني (ص):

الطرف الثاني (ص)					الطرف الأول (س)
الإستراتيجية	ص1	ص2	ص3	ص4	
س1	12	54	6-	66	
س2	42	48	36	54	
س3	18	24	12	24	
س4	30-	18	30	12-	

المطلوب:

- 1- تحديد نقطة التوازن وقيمة المباراة.
- 2- تحديد الإستراتيجية المثلى لكل طرف.

الحل

يتم تطبيق خطوات الطريقة التقليدية (المختصرة) كما يلي:

الطرف الثاني (ص)						الطرف الأول (س)
الإستراتيجية	ص1	ص2	ص3	ص4	أصغر رقم في الصف	
س1	12	54	6-	66	6-	
س2	42	48	36	54	36	
س3	18	24	12	24	12	
س4	30-	18	30	12-	30-	
أكبر رقم في العمود	42	54	36	66	أقصى الأدنى (36) أدنى الأقصى (36)	

- البحث عن الإستراتيجية المثلى لكل طرف:
- بالنسبة للطرف (س) ووفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى هي الإستراتيجية (س2) (الصف الثاني) ذات العائد = (36).

- بالنسبة للطرف (ص) ووفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى هي الإستراتيجية (ص3)(العمود الثالث) ذات الخسارة = (36).
- نقطة التوازن = (36)
- قيمة المباراة للطرف (س) = (36)
- قيمة المباراة للطرف (ص) = (36-)
- المجموع الجبرى لنتيجة المباراة =  $36 + (36-) = \text{صفر}$ .

### النوع الثانى: المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة: **Mixed Strategy Games**

الإستراتيجيات المختلطة هي التى تتضمن عدة إستراتيجيات يتبع أو يختار المتنافس كل إستراتيجية منها لفترة محددة من الوقت. ففى بعض الأحيان ونحن بصدد تحديد قيمة المباراة نجد أن المباراة ليس لها نقطة توازن (أى النقطة التى يرتضى الطرفان بها) وهذا يعنى أنه ليس هناك إستراتيجية صافية يمكن أن تحل المباراة من أولها لأخرها، لذلك نلجأ إلى اللعب بأكثر من إستراتيجية. وطبقاً للمباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة يتبنى كل طرف من طرفى المباراة مزيجاً من الإستراتيجيات المتاحة لديه، بحيث يستخدم كل واحدة منها خلال نسبة معينة من وقت المباراة وذلك سعياً نحو تحقيق هدفه إما تعظيم مكاسبه إلى أكبر قدر ممكن أو تقليل خسائره إلى أدنى حد ممكن.

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه عند حل أى مباراة يجب أولاً أن نحدد "نقطة التوازن" باستخدام الطريقة التقليدية "معيار أدنى الأقصى ومعيار أقصى الأدنى" فإذا تبين وجود هذه النقطة فى مصفوفة عوائد المباراة فهذا يعنى أننا قد توصلنا إلى حل المباراة وبالتالي تحديد قيمة المباراة والإستراتيجية المثلى التى يستخدمها كل طرف من طرفى المباراة والتى سوف يستخدمها طول وقت المباراة.



أما إذا لم توجد "نقطة التوازن" فإن ذلك يعنى عدم وجود إستراتيجية صافية لكل طرف متنافس، وإنما يلجأ كل طرف إلى استخدام العديد من الإستراتيجيات المتاحة لديه، أى يلعب كل طرف من طرفى المباراة بكل إستراتيجية نسبة من الوقت المخصص للمباراة.

وتوجد العديد من الطرق التى يمكن استخدامها لتحديد النسب من الأزمنة لاستخدام كل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لدى كل طرف من طرفى المباراة ومن ثم تحديد قيمة المباراة والإستراتيجيات المثلى لكل طرف، وتتمثل هذه الطرق فيما يلى:

- 1- الطريقة الجبرية.
- 2- الطريقة الحسابية.
- 3- طريقة الاحتمالات المشتركة.
- 4- طريقة المباريات الفرعية.

وفى ما يلى نعرض لكيفية استخدام كل طريقة من الطرق السابقة.

#### الطريقة الأولى: الطريقة الجبرية:

تعتمد هذه الطريقة على استخدام الرموز وقواعد الجبر ومبادئ الاحتمالات فى تحديد نسبة أو احتمال اختيار كل إستراتيجية (صف لمتنافس الصفوف، عمود لمتنافس الأعمدة) حيث أن مجموع احتمالات الوقت المخصص لإستراتيجيات الصفوف تساوى الواحد الصحيح، وكذلك مجموع احتمالات الوقت المخصص لإستراتيجيات الأعمدة تساوى أيضاً الواحد الصحيح. ولهذا وباستخدام قواعد الجبر يتم توزيع احتمالات الوقت المخصص بين إستراتيجيات الصفوف والأعمدة كما يلى:

أ- تحديد نسب الوقت أو احتمال اختيار كل طرف لكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لديه، بمعنى إذا كان احتمال استخدام متنافس الصفوف (الطرف الأول) للإستراتيجية الأولى أو الصف الأول (ل) فإن

احتمال استخدامه للإستراتيجية الثانية أو الصف الثاني (1-ل). كذلك إذا كان احتمال استخدام متنافس الأعمدة (الطرف الثاني) للإستراتيجية الأولى (العمود الأول (ى) فإن احتمال استخدامه للإستراتيجية الثانية (العمود الثاني) (1-ى).

ب- يتم تكوين معادلات لكل طرف يتم من خلالها التوصل إلى المزيج الأمثل لإستراتيجياته المتاحة ومن ثم تحديد نسبة استخدامه لكل إستراتيجية وبناءاً عليه نستطيع تحديد قيمة المباراة. ويمكن توضيح كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية:

مثال (3): إذا كانت مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الطرفين (أ)، (ب) كما يلي:

الطرف	الطرف (ب)		
	الاستراتيجية	ص1	ص2
	س1	4	16
	س2	20	12

المطلوب: أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف، وتحديد قيمة المباراة وذلك باستخدام الطريقة الجبرية.

### الحل

- البحث أولاً عما إذا كان لتلك المباراة "نقطة توازن" باستخدام الطريقة التقليدية "معيار أقصى الأدنى ومعيار أدنى الأقصى كما يلي:

الطرف	الطرف (ب)		
	الاستراتيجية	ص1	ص2
	س1	4	16
	س2	20	12
أكبر رقم في العمود	أقصى الأدنى (12)		
	أدنى الأقصى (16)		



وحيث أنه لا يوجد نقطة توازن مشتركة بين الطرفين، فإنه في هذه الحالة سيقوم كل طرف باختيار مزيحاً من الإستراتيجيات المتاحة لديه، إلى أن يلتقى الطرفين في نقطة توازن تقع بين (12) ، (16). وبالتالي كيف يمكن الوصول إلى نقطة التوازن باستخدام الطريقة الجبرية.

سوف نفترض أن الرموز المستخدمة كما يلي:

نسب الوقت لطرف (ب)	ي	1 - ي
نسب الوقت لطرف (أ)	ص1	ص2
(ب)		
(أ)		
س1	4	16
س2	20	12

ولإيجاد قيم كل من (ل) ، (ي) فإن الأمر يتطلب تحديد المكسب المتوقع للطرف الأول (أ)، وتحديد الخسارة المتوقعة للطرف الثاني (ب) كما يلي:

\* المكسب المتوقع للطرف الأول (أ):

البيان	عندما يستخدم (ب) (ص1)	عندما يستخدم (ب) (ص2)
عندما يستخدم (أ) (س1) بنسبة (ل) من الوقت	4 ل	16 ل
عندما يستخدم (أ) (س2) بنسبة (ل-1) من الوقت	20 (ل-1)	12 (ل-1)
المكسب المتوقع	4 ل + 20 (ل-1)	16 ل + 12 (ل-1)

وبمساواة المكسب المتوقع الذي يحصل عليه الطرف (أ) عندما يلعب الطرف (ب) بإستراتيجية (ص1) مع المكسب المتوقع للطرف (أ) عندما يلعب الطرف (ب) بإستراتيجية (ص2) يمكن الحصول على قيمة (ل) كما يلي:

$$4L + 12(1-L) = 20(1-L) + 16L$$

$$4L + 12 = 16L - 20$$

$$\therefore 20 = 8L \quad \therefore L = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ومنها } (1-L) = \frac{3}{5}$$

وبالتعويض عن قيم (L)، (1-L) في المعادلة:  $4L + 12(1-L)$  نحصل على قيمة المباراة بالنسبة للطرف (أ) كما يلي:

$$13.6 = \frac{68}{5} = \frac{60}{5} + \frac{8}{5} = \left(\frac{3}{5}\right) 20 + \left(\frac{2}{5}\right) 4$$

ويتضح مما سبق أن الطرف (أ) يستخدم الإستراتيجية (س1) بنسبة  $\left(\frac{2}{5}\right)$  أي بنسبة (40%) من الوقت المخصص للمباراة ، ويستخدم الإستراتيجية (س2) بنسبة  $\left(\frac{3}{5}\right)$  أي بنسبة (60%) من الوقت المخصص للمباراة. كما أن قيمة المباراة هي (13.6) وهذه القيمة تقع بين القيمتين 12 ، 16 اللذان توصلنا إليهما في البداية عند تطبيق معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى.

\* الخسارة المتوقعة للطرف الثاني (ب):

البيان	يستخدم (ب) (س1) بنسبة (ي) من الوقت	يستخدم (ب) (س2) بنسبة (1-ي) من الوقت	الخسارة المتوقعة
عندما يستخدم (أ) (س1)	4 ي	16 (1-ي)	4 ي + 16 (1-ي)
عندما يستخدم (أ) (س2)	20 ي	12 (1-ي)	20 ي + 12 (1-ي)

وبمساواة الخسارة المتوقعة للطرف (ب) عندما يلعب الطرف (أ) بإستراتيجية (س1) مع الخسارة المتوقعة للطرف (ب) عندما يلعب الطرف (أ) بإستراتيجية (س2) يمكن الحصول على قيمة (ي) كما يلي:



$$4 \text{ ي} + 16 ( \text{ي} - 1 ) = 20 \text{ ي} + 12 ( \text{ي} - 1 )$$

$$16 - 12 \text{ ي} = 20 \text{ ي} - 8$$

$$\therefore 20 \text{ ي} = 4 \therefore \text{ ي} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ومنها } ( \text{ي} - 1 ) = \frac{4}{5}$$

ويعنى ذلك أن الطرف (ب) يستخدم الإستراتيجية (ص1) بنسبة  $( \frac{1}{5} )$  أي بنسبة (20%) من الوقت المخصص للمباراة، ويستخدم الاستراتيجية (ص2) بنسبة  $( \frac{4}{5} )$  أي بنسبة (80%) من الوقت المخصص للمباراة.

وبالتعويض عن قيم (ي)،  $( \text{ي} - 1 )$  فى المعادلة:  $4 \text{ ي} + 16 ( \text{ي} - 1 )$  نحصل على قيمة المباراة بالنسبة للطرف (ب) كما يلى:

$$4 ( \frac{1}{5} ) + 16 ( \frac{4}{5} ) = \frac{40}{5} + \frac{64}{5} = \frac{68}{5} = 13.6$$

ومن هنا فإن قيمة المباراة للطرف (ب) = 13.6، وهى تساوى قيمة المباراة للطرف (أ)، وهذه القيمة تقع بين القيمتين 12 ، 16 اللذان حصلنا عليهما فى البداية عند تطبيق معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى.

**الخلاصة:**

\* قيمة المباراة = 13.6

\* الإستراتيجيات المثلى للطرف (أ) هى:

(س1) ← بنسبة  $( \frac{2}{5} )$  أي بنسبة (40%) من الوقت المخصص للمباراة.

(س2) ← بنسبة  $( \frac{3}{5} )$  أي بنسبة (60%) من الوقت المخصص للمباراة.

\* الإستراتيجيات المثلى للطرف (ب) هى:

(ص1) ← بنسبة  $( \frac{1}{5} )$  أي بنسبة (20%) من الوقت المخصص للمباراة.

(ص2) ← بنسبة  $( \frac{4}{5} )$  أي بنسبة (80%) من الوقت المخصص للمباراة.

## الطريقة الثانية: الطريقة الحسابية:

تستخدم هذه الطريقة في حالة المباريات التي يكون فيها أمام كل متنافس اختيارين أو إستراتيجيتين فقط، بمعنى يشترط لاستخدامها أن تكون مصفوفة العوائد للمباراة  $(2 \times 2)$ ، كما يتم استخدامها في حالة عدم وجود نقطة توازن للمباراة مثلما هو الحال في الطريقة الجبرية في تحديد نسب الأوقات اللازمة لكل إستراتيجية من الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف من طرفي المباراة.

وتتمثل خطوات تطبيق الطريقة الحسابية فيما يلي:

1- ا طرح أصغر قيمة من أكبر قيمة في كل صف ثم ضع ناتج الطرح على يمين مصفوفة العوائد.

2- ا طرح أصغر قيمة من أكبر قيمة في كل عمود ثم ضع ناتج الطرح أعلى المصفوفة.

3- بدل مواقع ناتج الطرح بالنسبة للصفوف وكذلك الأعمدة.

4- ا قسم كل قيمة مبدلة على مجموع تلك القيم المبدلة سواء في الصف أو في العمود، وبذلك نحصل على النسب المثلى لتقسيم زمن المباراة بين الإستراتيجيات المختلفة.

5- يتم ايجاد قيمة المباراة بالنسبة لكل متنافس كما يلي:

أ- قيمة المباراة لمتنافس الصفوف (الطرف الأول) تساوى مجموع حاصل ضرب نسبة كل صف  $\times$  مجموع حواصل ضرب مفردات الصف  $\times$  النسب المقابلة لها في كل عمود

أى أن قيمة المباراة لمتنافس الصفوف (الطرف الأول) =

نسبة كل صف  $\times$  مج (مفردات الصف  $\times$  النسب المقابلة لها في كل عمود)

ب- قيمة المباراة لمتنافس الأعمدة (الطرف الثانى) تساوى مجموع حاصل ضرب نسبة كل عمود  $\times$  مجموع حواصل ضرب مفردات العمود  $\times$  النسب المقابلة لها في كل صف



أى أن قيمة المباراة لمتنافس الأعمدة (الطرف الثانى) =  
نسبة كل عمود × مج (مفردات العمود × النسب المقابلة لها فى كل صف)  
مثال(4): فى المثال السابق رقم ( 3 ) أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل  
طرف وتحديد قيمة المباراة باستخدام الطريقة الحسابية.

### الحل

يتم تطبيق خطوات الطريقة الحسابية كما يلي:

1- طرح أصغر قيمة من أكبر قيمة فى كل صف وكل عمود وتكتب على  
يمين المصفوفة للصفوف وأعلىها للأعمدة وذلك كما يلي:

4	16	ناتج طرح الأعمدة	
ص2	ص1	(ب) (أ)	ناتج طرح الصفوف
16	4	ص1	12
12	20	ص2	8

2- بدل مواقع ناتج الطرح بالنسبة للصفوف وكذلك الأعمدة كما يلي:

16	4	تبديل الناتج	
ص2	ص1	(ب) (أ)	تبديل الناتج
16	4	ص1	8
12	20	ص2	12

3- اقسم كل قيمة مبدلة على مجموع تلك القيم المبدلة سواء فى الصف أو  
العمود، بمعنى ايجاد نسبة كل صف ونسبة كل عمود، ويعبر عن هذه النسبة

في صورة كسر بسيطة هو الرقم المبدل ناتج الطرح ومقامه هو حاصل جمع رقمي الطرح بعد التبديل وذلك كما يلي:

نسبة العمود	$\frac{4}{20}$	$\frac{16}{20}$
نسبة الصف	(ب) (أ)	ص1 ص2
$\frac{8}{20}$	س1	4 16
$\frac{12}{20}$	س2	20 12

#### 4- تحديد قيمة المباراة:

##### أ- قيمة المباراة للطرف (أ)

= نسبة كل صف × مج (مفردات الصف × النسبة المقابلة لها في كل عمود)

$$= \left[ \frac{16}{20} \times 12 + \frac{4}{20} \times 20 \right] \frac{12}{20} + \left[ \frac{16}{20} \times 16 + \frac{4}{20} \times 4 \right] \frac{8}{20} =$$

$$= \left[ \frac{192}{20} + \frac{80}{20} \right] \frac{12}{20} + \left[ \frac{256}{20} + \frac{16}{20} \right] \frac{8}{20} =$$

$$= \left[ \frac{272}{20} \right] \frac{12}{20} + \left[ \frac{272}{20} \right] \frac{8}{20} =$$

$$(13.6) = \frac{5440}{400} = \frac{3264}{400} + \frac{2176}{400}$$

وتشير هذه النتيجة إلى أنه الطرف (أ) تتمثل إستراتيجياته المثلى في:

(س1) ← بنسبة  $\left( \frac{8}{20} \right)$  أي  $\left( \frac{2}{5} \right)$  من الوقت المخصص للمباراة.

(س2) ← بنسبة  $\left( \frac{12}{20} \right)$  أي  $\left( \frac{3}{5} \right)$  من الوقت المخصص للمباراة وقيمة

المباراة بالنسبة للطرف (أ) = (13.6).

ب- قيمة المباراة للطرف (ب)



$$\begin{aligned}
&= \text{نسبة كل عمود} \times \text{مج (مفردات العمود} \times \text{النسبة المقابلة لها في كل صف)} \\
&= \left[ \frac{12}{20} \times 12 + \frac{8}{20} \times 16 \right] \frac{16}{20} + \left[ \frac{12}{20} \times 20 + \frac{8}{20} \times 4 \right] \frac{4}{20} = \\
&= \left[ \frac{144}{20} + \frac{128}{20} \right] \frac{16}{20} + \left[ \frac{240}{20} + \frac{32}{20} \right] \frac{4}{20} = \\
&= \left[ \frac{272}{20} \right] \frac{16}{20} + \left[ \frac{272}{20} \right] \frac{4}{20} = \\
&= \frac{5440}{400} = \frac{4352}{400} + \frac{1088}{400} = (13.6)
\end{aligned}$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن الإستراتيجيات المثلّية للطرف (ب) تتمثل في:

(ص1) ← بنسبة  $\left(\frac{4}{20}\right)$  أى  $\left(\frac{1}{5}\right)$  من الوقت المخصص للمباراة.

(ص2) ← بنسبة  $\left(\frac{16}{20}\right)$  أى  $\left(\frac{4}{5}\right)$  من الوقت المخصص للمباراة

قيمة المباراة بالنسبة للطرف (ب) هي (13.6)

لاحظ: أن النتيجة التى توصلنا إليها باستخدام الطريقة الحسابية هي نفس النتيجة باستخدام الطريقة الجبرية.

**الطريقة الثالثة: طريقة الاحتمالات المشتركة:**

تهدف هذه الطريقة إلى تحديد قيمة المباراة من خلال إيجاد القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة وبجمع هذه القيم لتحديد قيمة المباراة.

حيث تقوم هذه الطريقة على أساس أن احتمال حدوث كل عنصر من عناصر مصفوفة عوائد المباراة تتمثل في حاصل ضرب احتمال حدوث الصف والعمود اللذين يوجد بهما هذا العنصر. ومن خلال تحديد هذا الاحتمال يمكن تحديد القيمة المتوقعة للعنصر عن طريق ضرب هذا العنصر في الاحتمال المشترك للعنصر.

بمعنى أنه يتم حساب القيمة المتوقعة لكل عنصر كما يلي:

القيمة المتوقعة للعنصر = قيمة العنصر × الاحتمال المشترك للعنصر

الاحتمال المشترك للعنصر = احتمال حدوث صف العنصر  $\times$  احتمال حدوث عمود العنصر.

وفي ضوء ما سبق فإن استخدام طريقة الاحتمالات المشتركة لحساب قيمة المباراة تتطلب أولاً ضرورة تحديد احتمال استخدام كل متنافس لكل إستراتيجية من إستراتيجيات الصف والعمود.

وبتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق، حيث كانت مصفوفة العوائد كما يلي:

نسبة العمود	$\frac{4}{20}$	$\frac{16}{20}$
نسبة الصف	(ب) (أ)	ص2
س1	4	16
س2	20	12

\* القيمة المتوقعة للعنصر = قيمة العنصر  $\times$  الاحتمال المشترك للعنصر

ويوضح الجدول التالي كيفية حساب قيمة المباراة باستخدام هذه الطريقة:

عناصر مصفوفة العوائد	الاستراتيجيات التي توصل إلى عنصر العائد	الاحتمال المشترك	القيمة المتوقعة
4	س1 ، ص1	$\frac{2}{25} = \frac{4}{20} \times \frac{8}{20}$	$\frac{8}{25} = \frac{2}{25} \times 4$
16	س1 ، ص2	$\frac{8}{25} = \frac{16}{20} \times \frac{8}{20}$	$\frac{128}{25} = \frac{8}{25} \times 16$
20	س2 ، ص1	$\frac{3}{25} = \frac{4}{20} \times \frac{12}{20}$	$\frac{60}{25} = \frac{3}{25} \times 20$
12	س2 ، ص2	$\frac{12}{25} = \frac{16}{20} \times \frac{12}{20}$	$\frac{144}{25} = \frac{12}{25} \times 12$
قيمة المباراة			$13.6 = \frac{340}{25}$



لاحظ أنها نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستخدام الطريقة الجبرية والطريقة الحسابية.

#### الطريقة الرابعة: طريقة المباريات الفرعية:

تعتبر طريقة المباريات الفرعية إحدى الطرق التي تساهم في حل نتائج المباريات الكبيرة والتي يصعب اختصار عناصرها إلى  $(2 \times 2)$  حتى بعد استخدام قاعدة السيطرة وفي مثل هذه الحالات تستخدم طريقة المباريات الفرعية. وتعتمد تلك الطريقة على تقسيم مصفوفة عوائد المباراة إلى عدة مصفوفات أو مباريات فرعية بحيث تصبح كل مباراة فرعية  $(2 \times 2)$  ثم تحل كل مباراة فرعية باستخدام إحدى طرق الحل السابقة.

مثال (5): إذا توافرت لديك مصفوفة عوائد إحدى المباريات بين الطرفين (س) ، (ص):

(ص) / (س)	ص1	ص2	ص3	ص4	ص5	ص6
س1	16	12-	20	4-	10	8
س2	6	8	14	16-	18	12-

المطلوب: استخدام طريقة المباريات الفرعية في تحديد كل من:

1- الإستراتيجية المثلى لكل طرف.

2- قيمة المباراة.

#### الحل

\* يلاحظ أنه لا يوجد نقطة توازن لهذه المصفوفة، وحيث أنها مصفوفة  $(2 \times 6)$  فيجب استبعاد الإستراتيجيات التي لا تحقق أى عائد للطرف (ص)، وبفحص المصفوفة نجد أنه من مصلحة الطرف (ص) عدم استخدام الإستراتيجيات (ص1 ، ص3 ، ص5) لأنها تمنح الطرف (س) فرصاً لتحقيق

الكسب وبالتالي يجب استبعاد تلك الإستراتيجيات من مصفوفة العوائد قبل حل المباراة.

وبعد استبعاد تلك الإستراتيجيات تصبح المصفوفة (2 × 3) كما يلي:

ص س	ص	ص2	ص4
س1	12-	4-	8
س2	8	16-	12-

وبناء على ذلك فإنه يتم تقسيم هذه المصفوفة إلى ثلاث مصفوفات أو مباريات فرعية كما يلي:

\* المباراة الفرعية الأولى:

ص س	ص	ص2
س1	12-	4-
س2	8	16-

\* المباراة الفرعية الثانية:

ص س	ص	ص2
س1	12-	8
س2	8	12-



### \* المباراة الفرعية الثالثة:

ص	ص	ص س
8	4-	س1
12-	16-	س2

ويتم حل كل مباراة فرعية من هذه المباريات الفرعية الثلاث باستخدام الطريقة الجبرية أو الطريقة الحسابية السابق تناولها.

### مفهوم قاعدة السيطرة (الحذف):

تهدف قاعدة السيطرة إلى اختصار أو تخفيض عدد الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف في المباراة وذلك عندما تكون الإستراتيجيات المتاحة لكل طرف أكثر من اثنين، ويقال حينئذ أن المباراة تزيد عن (2×2). وبمقتضى هذه الطريقة يتم حذف بعض الإستراتيجيات "صفوف أو أعمدة" والتي ليس لها مبرر للاستخدام لأنها لا تمثل أى اضافة حقيقية لأى طرف من أطراف المباراة، أى أن حذفها لا يؤثر على نتيجة المباراة.

وتتلخص قاعدة السيطرة فى قاعدتين هما:

**القاعدة الأولى:** إذا كانت كل عناصر (أرقام) أحد الصفوف أقل من أو تساوى نظائرها فى صف آخر، يعتبر ذلك الصف الأقل صف مسيطر عليه ويمكن حذفه من المباراة.

**القاعدة الثانية:** إذا كانت كل عناصر (أرقام) أحد الأعمدة أكبر من أو تساوى نظائرها فى عمود آخر، يعتبر ذلك العمود عمود مسيطر عليه ويمكن حذفه من المباراة.

ويتم تطبيق قاعدة السيطرة بالنسبة لكل طرف فى المباراة وفقا لما يلى:

1- بالنسبة لمتنافس الصفوف (الطرف الذى يربح) يتم مقارنة كل إستراتيجيتين مع بعضهم البعض، فإذا كان هناك إستراتيجية (أى صف) أفضل من الأخرى (الصف الآخر)، حيث تزيد أرباح تلك الإستراتيجية أو تتساوى مع أرباح الإستراتيجية الأخرى، ففي هذه الحالة يتم الإبقاء على الإستراتيجية الأفضل وحذف الإستراتيجية الأخرى دون أن يؤثر ذلك على قيمة المباراة.

2- بالنسبة لمتنافس الأعمدة (الطرف الذى يخسر) يتم مقارنة كل إستراتيجيتين مع بعضهم البعض، فإذا كان هناك إستراتيجية (أى عمود) أفضل من الإستراتيجية الأخرى (العمود الآخر)، حيث تقل خسائر تلك الإستراتيجية أو تتساوى مع خسائر الإستراتيجية الأخرى، ففي هذه الحالة يتم الإبقاء على الإستراتيجية الأفضل وحذف الإستراتيجية الأخرى دون أن يؤثر ذلك على قيمة المباراة.

وتجدر الإشارة فى هذا الصدد أنه يمكن تطبيق قاعدة السيطرة على المباريات ذات الإستراتيجية الصافية (ثم تحديد قيمة المباراة عن طريق تطبيق الطريقة التقليدية)، وكذلك على المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة (ثم إيجاد قيمة المباراة بأى طريقة ممكنة من الطرق التى سبق ذكرها).

مثال (6): فيما يلى مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهما: الشركة (أ) ، والشركة (ب):

	ب	أ
ص1	12	32
ص2	24	20

المطلوب:



1- تحديد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف.

2- تحديد قيمة المباراة.

### الحل

لاحظ أن المصفوفة السابقة لا يوجد لها نقطة توازن، ومن ثم يجب إختصار تلك المصفوفة لتصبح  $(2 \times 2)$  بالنسبة لإستراتيجيات الطرف (أ) فإننا نحاول استبعاد أى إستراتيجية منها حيث:

نقارن الإستراتيجية (س1) مع الإستراتيجية (س2) نجد أن الإستراتيجية (س1) أفضل من (س2) فى بعض الحالات، وفى حالات أخرى نجد (س2) أفضل من (س1) وبالتالي لا توجد إستراتيجية منها أفضل ومسيطرة على الأخرى. ونستمر فى المقارنة بين (س1) و (س3) نجد أن (س1) أفضل من (س3) فى بعض الحالات فقط. نستمر فى المقارنة بين (س2) و (س3) نجد أن (س2) أفضل من (س3) فى كل الحالات فإن الإستراتيجية (س3) إستراتيجية مسيطر عليها ويجب استبعادها. وبالتالي تصبح المصفوفة  $(2 \times 2)$  كما يلي:

ب أ	ص1	ص2	أصغر رقم فى الصف
	12	12-	12-
س1	16	32	16
س2	16	32	16
أكبر رقم فى العمود	16	32	أقصى الأدنى (16) أدنى الأقصى (16)

\* قيمة المباراة = (16)

\* نقطة التوازن = (16)

\* بالنسبة للطرف (أ) ووفقاً لمعيار أقصى الأدنى تكون الإستراتيجية المثلى له هي (س2) ذات العائد = (16).

\* بالنسبة للطرف (ب) ووفقاً لمعيار أدنى الأقصى تكون الإستراتيجية المثلى له هي (ص1) ذات الخسارة = (16).

\* المجموع الجبرى لنتيجة المباراة =  $16 + (-16) =$  صفر.

مثال(7): بفرض أن هناك شركتين متنافستين لكل منهما (3) إستراتيجيات، ويوضح الجدول التالى عوائد المنافس (أ) وخسائر المنافس (ب):

ب / أ	ب <sub>1</sub>	ب <sub>2</sub>	ب <sub>3</sub>
أ <sub>1</sub>	4	3	5
أ <sub>2</sub>	2	20	6
أ <sub>3</sub>	1	2	3

المطلوب: تحديد قيمة المباراة والإستراتيجيات التى يلعب بها كل منافس؟

### الحل

نبحث أولاً عن وجود نقطة توازن لهذه المباراة باستخدام معيار أقصى الأدنى ومعيار أدنى الأقصى كما يلى:

ب / أ	ب <sub>1</sub>	ب <sub>2</sub>	ب <sub>3</sub>	أصغر رقم فى الصف
أ <sub>1</sub>	4	3	5	3
أ <sub>2</sub>	2	20	6	2
أ <sub>3</sub>	1	2	3	1
أكبر رقم فى العمود	4	20	6	أقصى الأدنى (3) أدنى الأقصى (4)



يلاحظ أن المباراة ليس لها نقطة توازن وبالتالي لا توجد إستراتيجية صافية لكل طرف، ولكنها مباراة ذات إستراتيجيات مختلطة. الأمر الذي يتطلب تطبيق قاعدة السيطرة لتخفيض المصفوفة السابقة لتصبح (2×2) كما يلي:

بالنسبة للطرف (أ) نجد أن (أ<sub>1</sub>) مهيمنة على (أ<sub>3</sub>) لذلك يمكن استبعاد الإستراتيجية (أ<sub>3</sub>)، وبالنسبة للطرف (ب) نجد أن (ب<sub>1</sub>) مهيمنة على (ب<sub>3</sub>) لذلك يتم استبعاد الإستراتيجية (ب<sub>3</sub>). وتصبح المصفوفة (2×2) بعد تطبيق قاعدة السيطرة كما يلي:

ب	أ	ب <sub>1</sub>	ب <sub>2</sub>
		أ <sub>1</sub>	أ <sub>2</sub>
4	3		
2	20		

ويمكن استخدام إحدى طرق حل المباريات ذات الإستراتيجيات المختلطة وبفرض تطبيق الطريقة الجبرية فإن النسب المختلفة لاستخدام الإستراتيجيات تكون كما يلي:

$$ل = \frac{18}{19} ، 1 - ل = \frac{1}{19}$$

$$ي = \frac{17}{19} ، 1 - ي = \frac{2}{19}$$

$$\text{قيمة المباراة للطرف (أ)} = \frac{74}{19} = (3.9)$$

$$\text{قيمة المباراة للطرف (ب)} = (3.9)$$

لاحظ أن قيمة المباراة (3.9) تقع بين القيمتين (3 ، 4) اللذان حصلنا عليهما في البداية عند تطبيق معيار أقصى الأدنى وأدنى الأقصى.

## تمارين علي الفصل الثامن

تمرين (1): ما هي قيمة المباراة التالية، وما هي الإستراتيجية المثلى بالنسبة لكل من (أ)، (ب):

الطرف (ب)			<div style="text-align: center;"> <math>\begin{matrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{matrix}</math> </div>
ب <sub>2</sub>	ب <sub>1</sub>	الإستراتيجية	
120	100	أ <sub>1</sub>	
140	120 -	أ <sub>2</sub>	

تمرين (2): يرغب أحد الباحثين في قسم إدارة الأعمال في تكوين مصفوفة العوائد الخاصة بمباراة بين طرفين، الطرف الأول هو (أ) والطرف الثاني هو (ب). ويتوافر لدى كل منهما إستراتيجيتين (أ<sub>1</sub> ، أ<sub>2</sub>) بالنسبة لطرف (أ)، أما الطرف الثاني (ب) فيتوافر لديه (ب<sub>1</sub> ، ب<sub>2</sub>)، فإذا علمت أن إتباع الطرف (أ) للإستراتيجية (أ<sub>1</sub>) سوف يحقق له ربح قدره 200 جنيه إذا اتبع الطرف (ب) الإستراتيجية (ب<sub>1</sub>)، في حين أن الطرف (أ) سوف يحقق فقط 40 جنيهاً ربحاً إذا اتبع (أ<sub>2</sub>) وفي نفس الوقت اتبع الطرف (ب) الإستراتيجية (ب<sub>2</sub>). ومن ناحية أخرى سوف يخسر الطرف (ب) 120 جنيهاً إذا اتبع الإستراتيجية (ب<sub>2</sub>) وفي نفس الوقت اتبع الطرف (أ) الإستراتيجية (أ<sub>1</sub>)، في حين أن الطرف (ب) سوف يخسر 160 جنيه في مواجهة الطرف (أ) إذا اتبع الإستراتيجية (ب<sub>1</sub>) في الوقت الذي يتبع فيه الطرف (أ) الإستراتيجية (أ<sub>2</sub>).  
المطلوب:

- 1- تكوين مصفوفة العوائد لهذه المباراة.
- 2- ما هي نقطة التوازن أو قيمة المباراة.
- 3- ما هي الإستراتيجية المثلى لكل طرف.



تمرين (3): إذا توافرت لديك مصفوفة العوائد التالية لإحدى المباريات بين الطرفين (س)، (ص):

الطرف (ص)	الطرف (ص)			
	الاستراتيجية	ص1	ص2	ص3
	س1	100	10 -	82
	س2	82	54	72
	س3	36	18	36
	س4	18 -	46	28

المطلوب:

1- تحديد نقطة التوازن وقيمة المباراة.

2- تحديد الإستراتيجيات المثلى لكل طرف في المباراة.

تمرين (4): ما هي قيمة المباراة التالية وما هي الإستراتيجيات المثلى لكل طرف (أ) ، (ب): (ملحوظة استخدم الطريقة الحسابية في حل المباراة وتحديد قيمتها).

ب	ب	
	ب1	ب2
أ1	60	56
أ2	52	68

تمرين (5): في التمرين السابق (رقم 4) حدد قيمة المباراة والإستراتيجيات المثلى لكل طرف باستخدام الطريقة الجبرية.

تمرين (6): فيما يلي مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين شركتين وهي الشركة (س) والشركة (ص). والمطلوب تحديد قيمة المباراة

والإستراتيجيات المثلى لكل شركة (ملحوظة استخدم الطريقة الحسابية في حل المباراة وتحديد قيمتها).

الشركة (ص) الشركة (س)	ص1	ص2	ص3	ص4
س1	40	30	24	70
س2	50	28	16	20
س3	80	4	38	10
س4	10 -	8	22	صفر

تمرين (7): في التمرين السابق رقم (6) المطلوب:

1- تحديد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لكل شركة باستخدام الطريقة الجبرية.

2- تحديد قيمة المباراة باستخدام طريقة الاحتمالات المشتركة.

تمرين (8): حدد قيمة المباراة التالية والاستراتيجية المثلى لكل من الطرفين (س) (ص):

ص س	ص1	ص2	ص3
س1	180	160	140
س2	200	200	160
س3	220	180	210



تمرين (9): إذا توفرت لديك مصفوفة العوائد الخاصة بإحدى المباريات بين الشريكتين (م)، (ل):

ل \ م	1ل	2ل	3ل	4ل
1م	20	60	50	30
2م	10	80	20	60
3م	30	50	10	20
4م	40	40	30	80

المطلوب:

تحديد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لكل شركة باستخدام:

- 1- الطريقة الجبرية.
- 2- الطريقة الحسابية.
- 3- طريقة الاحتمالات المشتركة.

تمرين (10):

حدد قيمة المباراة التالية والاستراتيجيات المثلى لكل طرف (أ)، (ب):

ب \ أ	1أ	2أ	3أ
1ب	10 -	50	صفر
2ب	36	40	1 -

## الفصل التاسع

### نماذج تحليل شبكات الأعمال: تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع

- مقدمة.
- استخدام أسلوب المسار الحرج (CPM) في تحليل العلاقة بين وقت  
وتكلفة تنفيذ المشروع.
- استخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT) في تحليل العلاقة  
بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع.
- تمارين للتدريب.



## نماذج تحليل شبكات الأعمال: تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع

### مقدمة:

نتناولنا في مقرر إدارة الإنتاج والعمليات نماذج تحليل شبكات الأعمال، حيث نتناولنا كل من أسلوب المسار الحرج وأسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت) وكيفية تقدير الوقت المتوقع وكذلك كيفية حساب الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة لكل نشاط على شبكة الأعمال وذلك بهدف الوصول إلى المسار الحرج والذي يمثل أطول وقت على الشبكة من البداية إلى النهاية ويحدد ذلك المسار الحد الأدنى من الوقت اللازم لاتمام المشروع.

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد علاقة وثيقة بين كل من وقت تنفيذ المشروع وتكلفته، هذا ولابد من دراسة وتحليل هذه العلاقة، حيث يفيد ذلك في توفير معلومات أمام القائمين على إدارة المشروع تمكنهم من المقارنة بين تنفيذ المشروع في وقت عادي بتكلفة أقل، أو تنفيذ هذا المشروع في وقت أقل بتكلفة مرتفعة وهي التي يطلق عليها عملية الإسراع في تنفيذ المشروع.

ولتوضيح العلاقة بين كل من وقت وتكلفة تنفيذ المشروع فإن الأمر يتطلب ضرورة التعرف على بعض المصطلحات الأساسية والتي سيرد ذكرها في إطار التعرض لهذا الموضوع وهي:

1- الوقت العادي (Normal Time): وهو الوقت الذي يمثل الاستخدام الكفاء للموارد المتاحة واللازمة لأداء النشاط من عمالة وخامات وآلات ..... الخ.

2- الوقت المتسرع (Crash Time): وهو يمثل الحد الأدنى الممكن من الوقت الذي يُخطط للنشاط أن يتم خلاله. ونصل إلى هذا الوقت عادة بزيادة الموارد المخصصة لأداء النشاط (أي عن طريق استخدام موارد إضافية).

3- التكلفة العادية (Normal Cost): وهى التكاليف التى ترتبط أساساً بتنفيذ النشاط فى الوقت العادى.

4- التكلفة المتسربة (Crash Cost): وهى التكاليف التى يتحملها المشروع نتيجة لتنفيذ أنشطة المشروع فى أقل وقت ممكن، وهى التكاليف التى ترتبط أساساً بتنفيذ الأنشطة المختلفة للمشروع فى الوقت المتسرع. وعادة تكون تلك التكلفة أعلى من التكاليف العادية بسبب زيادة الأجور الإضافية أو زيادة التسهيلات الإضافية.

5- ميل التكلفة (Cost Slope): يتم حساب ميل التكلفة لكل نشاط من أنشطة المشروع باستخدام المعادلة التالية:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسربة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادى} - \text{الوقت المتسرع}}$$

أى أن ميل التكلفة لأى نشاط يعادل الزيادة فى تكلفة النشاط مقسومة على النقص فى وقت النشاط.

استخدام أسلوب المسار الحرج (CPM) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع:

مع أن أسلوب المسار الحرج فى جدولة وتخطيط المشروعات يحدد لنا أدنى زمن ممكن لتنفيذ المشروع إلا أن إدارة المشروع ترغب أحياناً وتضطر أحياناً أخرى للتعجيل فى انجاز المشروع بزمن أقل من ذلك الذى يحدده لنا المسار الحرج.

وتتم عملية التعجيل هذه بمحاولة الإسراع بتنفيذ واحد أو أكثر من الأنشطة الحرجة من خلال دفع تكاليف إضافية مقابل ذلك، فإذا تقرر الإسراع بزمن انتهاء المشروع المحدد وفقاً للمسار الحرج فإن الأمر يتطلب الإسراع بتكثيف



الجهود وما ينتج عن ذلك من زيادة في التكاليف، فنصبح في وضع مقايضة بين التخفيض في زمن انتهاء المشروع وبين الزيادة في التكلفة.

ولتوضيح العلاقة بين كل من وقت وتكلفة تنفيذ المشروع فإن الأمر يتطلب ضرورة التفرقة بين نوعين من التكاليف وهما:

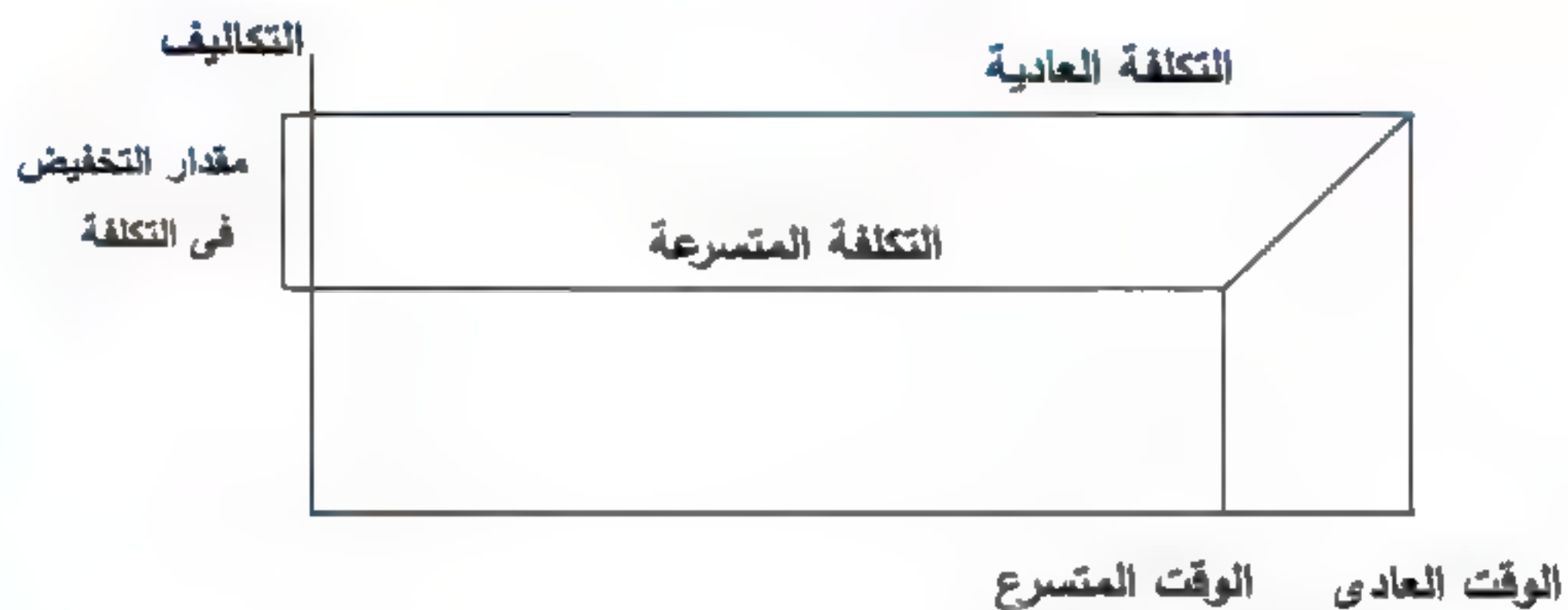
**النوع الأول:** التكاليف المتغيرة (المباشرة): وهي التكاليف التي تتغير في مجموعها بتغيير حجم النشاط. ويتم تخصيصها لهذا النشاط مثل تكاليف المواد المستخدمة لانجاز هذا النشاط، وتكاليف شراء المعدات، وتكاليف القائمين على التنفيذ (عمال، فنيين، مهندسين).

**النوع الثاني:** التكاليف الثابتة (غير المباشرة): وهي التكاليف التي تخص المشروع أو مجموعة أنشطة ككل، وهي التكاليف الثابتة في مجموعها بغض النظر عن حجم أو مستوى النشاط ومن أمثلتها: المصاريف الإدارية ومصاريف التخطيط للمشروع والإشراف عليه.

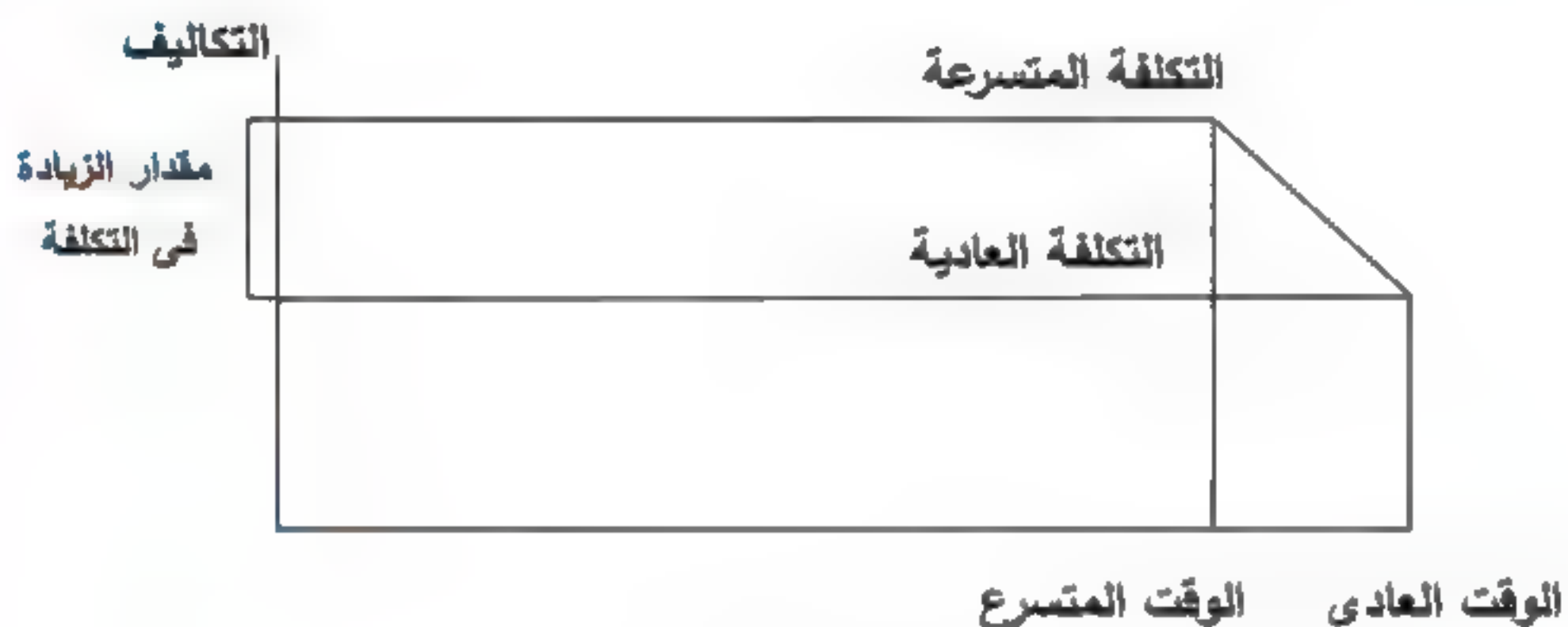
ويمكن للقائمين على إدارة المشروع تخفيض وقت تنفيذ هذا المشروع من خلال اضافته المزيد من الموارد اللازمة لإتمام بعض الأنشطة مثل اضافته وتشغيل آلات جديدة أو استخدام عمالة أكثر مما يؤدي إلى زيادة التكاليف.

ومما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أن الإسراع في وقت تنفيذ المشروع من خلال تخفيض الفترة الزمنية اللازمة لانجازه يؤدي إلى زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة لتحمل المشروع لأجور اضافية أعلى من الأجور العادية أو شراء المشروع للخامات بسعر أعلى اختصاراً لفترة إتمام المشروع.

في حين تعتبر التكاليف الثابتة تكاليف زمنية مرتبطة بالزمن، وبالتالي فإن الإسراع في وقت تنفيذ المشروع من خلال تخفيض الفترة الزمنية اللازمة لانجازه يؤدي إلى تخفيض التكاليف الثابتة الخاصة بزمن إتمام هذا المشروع. وهذه العلاقة بين التكاليف المتغيرة والتكاليف الثابتة وبين وقت تنفيذ المشروع يمكن توضيحها من خلال الشكلين التاليين رقم (9-1) ، (9-2):



شكل رقم (9-1): العلاقة بين التكاليف الثابتة ووقت تنفيذ المشروع.



شكل رقم (9-2): العلاقة بين التكاليف المتغيرة ووقت تنفيذ المشروع

وتتوقف عملية اتخاذ القرار على مدى العلاقة بين الزيادة في التكاليف المتغيرة والنقص في التكاليف الثابتة، فكلما كانت الزيادة في التكاليف المتغيرة أعلى من الوفر الناشئ في التكاليف الثابتة فإن القرار في هذه الحالة عدم الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة الحرجة. أما إذا اتضح من التحليل أنه يترتب على الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة الحرجة وجود وفر في التكاليف الثابتة للمشروع يزيد عن مقدار الزيادة في التكاليف المتغيرة للأنشطة التي يتقرر ضرورة الإسراع بها القرار يكون بالإسراع.



وبالتالى فإن أسلوب المسار الحرج يقدم للإدارة فرصة للموازنة بين تخفيض التكاليف الثابتة عن طريق تخفيض وقت تنفيذ المشروع ككل، وبين زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة زيادة الموارد المطلوبة للإسراع فى تنفيذ بعض الأنشطة وبالتالى تخفيض وقت إتمام المشروع عن الوقت المحدد.

أى أن أسلوب المسار الحرج بهدف أساساً إلى الوصول إلى الحل الأمثل والذي يتمثل فى إحداث توازن بين وقت تنفيذ المشروع من ناحية، وبين كل من التكاليف الثابتة والمتغيرة من ناحية أخرى. فتعمل الإدارة على البحث عن النقطة من الزمن التى عندها يتحقق التوازن بين تخفيض التكاليف الثابتة نتيجة لتخفيض الوقت الكلى لإتمام المشروع وبين زيادة التكاليف المتغيرة نتيجة الإسراع بتنفيذ بعض الأنشطة، وعند تلك النقطة من الزمن تكون التكاليف الكلية للمشروع عند أدنى حد لها.

ويمكن توضيح كيفية استخدام أسلوب المسار الحرج فى تحليل العلاقة بين وقت وتكاليف تنفيذ المشروع من خلال الأمثلة التالية:

مثال (1):

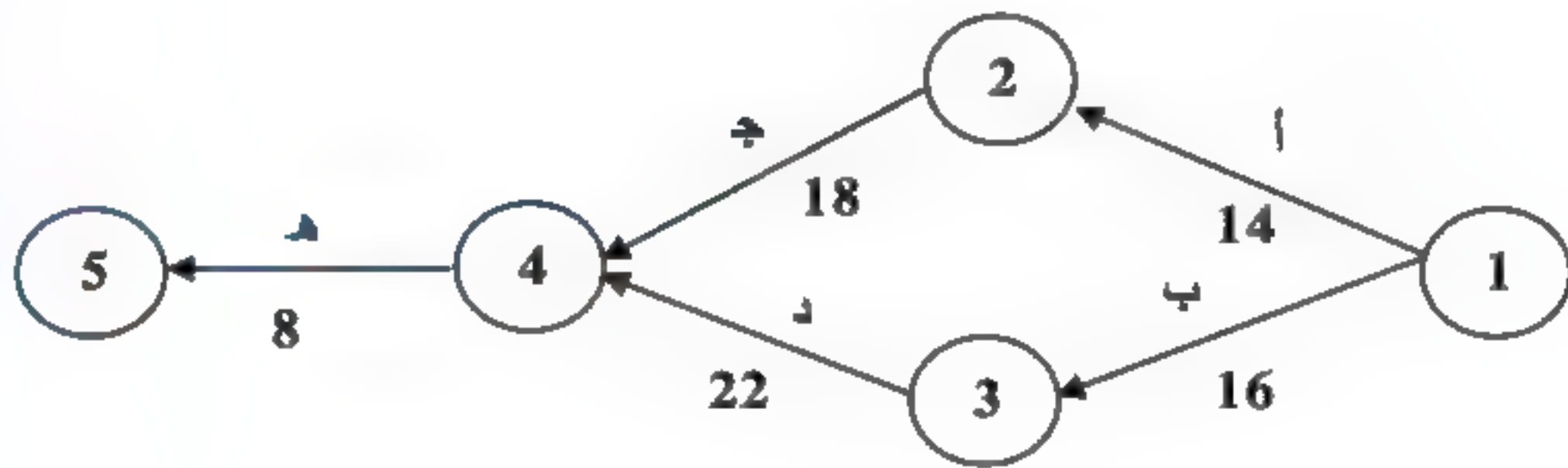
توفرت لديك البيانات التالية عن الأنشطة اللازمة للإنتهاء من إتمام إحدى المشروعات الهندسية، علماً بأن قيمة التكاليف الثابتة لهذا المشروع هى (2400) جنيه / اليوم.

النشاط	مسار النشاط	الوقت العادي باليوم	الوقت المتسرع باليوم	معدل الزيادة في التكاليف المتغيرة جنيهه / يوم
أ	2-1	14	14	-
ب	3-1	16	12	720
ج	4-2	18	14	1200
د	4-3	22	18	1680
هـ	5-4	8	6	1440

المطلوب: تخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذي يمكن الوصول إليه.

الحل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال كما يلي:



الخطوة الثانية: تحديد المسار الحرج:

المسار الأول: 5 - 4 - 2 - 1

أ ج هـ = 14 + 18 + 8 = 40 يوم

المسار الثاني: 5 - 4 - 3 - 1

ب د هـ = 16 + 22 + 8 = 46 يوم

∴ المسار الحرج هو المسار (ب د هـ) وزمنه = 46 يوم.



∴ الوقت العادي لإتمام للمشروع = وقت المسار الحرج = 46 يوم

\* تكاليف تنفيذ المشروع = التكلفة المتسارعة + التكاليف الثابتة

$$= \text{صفر} + (46 \times 2400) = 110400 \text{ جنيه}$$

لاحظ أنه تم إهمال التكلفة المتسارعة وهي التكلفة المتغيرة للأنشطة.

الخطوة الثالثة: تحديد حدود فترة التخفيض ومعدل الزيادة في التكلفة المتغيرة لكل نشاط من أنشطة المشروع كما يتضح في الجدول التالي:

النشاط	معدل الزيادة في التكلفة المتغيرة يومياً	حدود فترة التخفيض = الوقت العادي - الوقت المتسارع
أ	-	14-14 = صفر
ب	720	12-16 = 4 يوم
ج	1200	14-18 = 4 يوم
د	1680	18-22 = 4 يوم
هـ	1440	6-8 = 2 يوم

الخطوة الرابعة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج (ب د هـ)

حيث نجد أن معدل الزيادة في التكلفة المتغيرة في اليوم

للنشاط (ب) = 720 جنيه

للنشاط (د) = 1680 جنيه

للنشاط (هـ) = 1440 جنيه

∴ يتم اختيار النشاط (ب) صاحب أقل معدل زيادة في التكلفة المتغيرة،

وحدود فترة التخفيض للنشاط (ب) = 16 - 12 = 4 أيام.

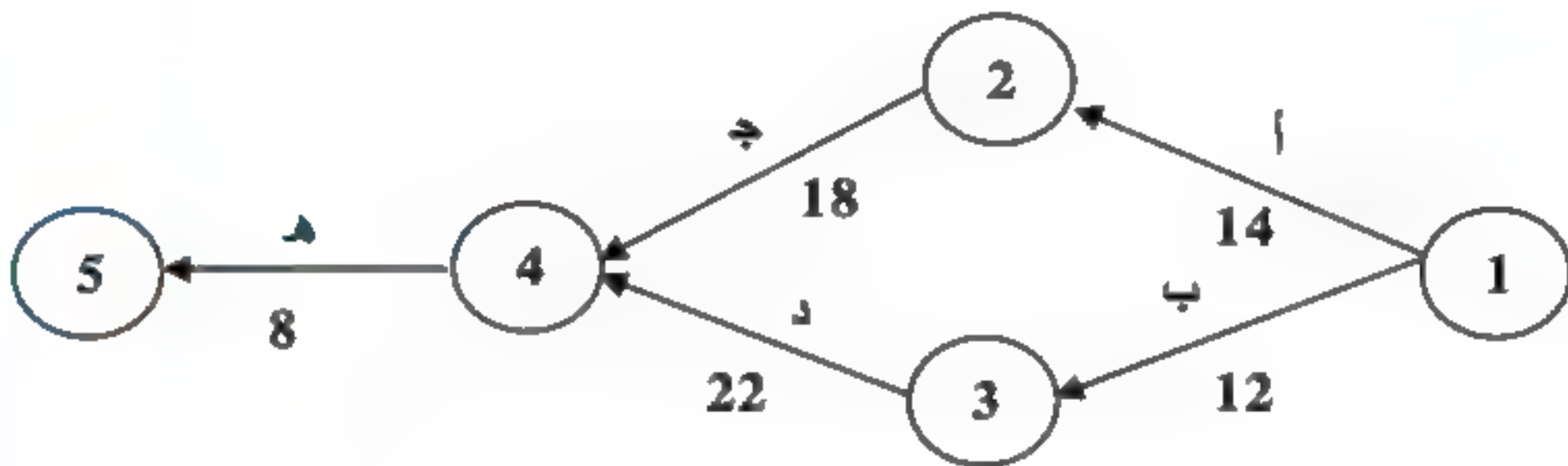
وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بعمل الآتي:

\* حساب الفرق بين طول المسار الحرج وطول المسار الآخر على الشبكة:

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ)

$$= 46 - 40 = 6 \text{ أيام.}$$

\* وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (ب) الذي وقع عليه الاختيار (4 أيام) لأنه صاحب أقل معدل زيادة في التكلفة المتغيرة (720). وبما أن الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ) (6 أيام)  $\therefore$  يتم تخفيض النشاط (ب) بحدود فترة تخفيضه بالكامل وهي (4 أيام) دون الخوف من تحول المسار الحرج. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



$$\therefore \text{الوقت اللازم لإتمام المشروع} = 46 - 4 = 42 \text{ يوم.}$$

$$\text{* تكاليف تنفيذ المشروع} = \text{التكلفة المتسارعة للنشاط (ب)} + \text{التكاليف الثابتة}$$

$$= (720 \times 4) + (42 \times 2400) = 103680 \text{ جنيه.}$$

يتضح من شبكة الأعمال السابقة أن المسار الحرج مازال هو المسار (ب د هـ) ولكن أصبح طوله

$$= 12 + 22 + 8 = 42 \text{ يوم}$$

**التخفيض الثاني:** يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط (ب) قد استنفذ فترة تخفيضه بالكامل، فإنه يتم اختيار النشاط صاحب أقل معدل زيادة في التكلفة المتغيرة بعد ذلك وهو النشاط (هـ)

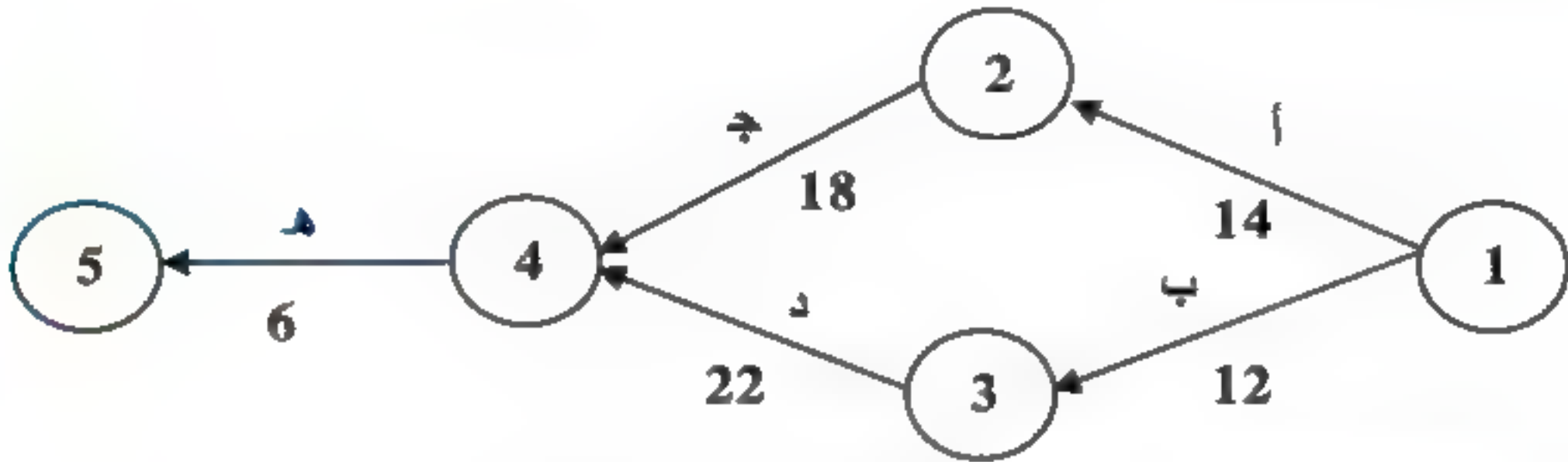
$$\text{* حدود فترة التخفيض للنشاط (هـ)} = 6 - 8 = 2 \text{ يوم.}$$

$$\text{* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ)}$$



$$= 42 - 40 = 2 \text{ يوم}$$

إذاً يتم تخفيض النشاط (هـ) بمقدار يومين. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع =  $42 - 2 = 40$  يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع = التكلفة المتسارعة للنشاط (هـ) + التكاليف الثابتة  
 $= (1440 \times 2) + (40 \times 2400) = 98880$  جنيه.

يتضح من شبكة الأعمال السابقة أن المسار الحرج مازال هو المسار (ب د هـ) ولكن أصبح طوله

$$= 12 + 22 + 6 = 40 \text{ يوم}$$

التخفيض الثالث: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاطان (ب)، (هـ) قد استنفذا فترة تخفيضهما بالكامل، فإنه يتم اختيار النشاط صاحب أقل معدل زيادة في التكلفة المتغيرة بعد ذلك وهو النشاط (د)

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (د) =  $22 - 18 = 4$  أيام.

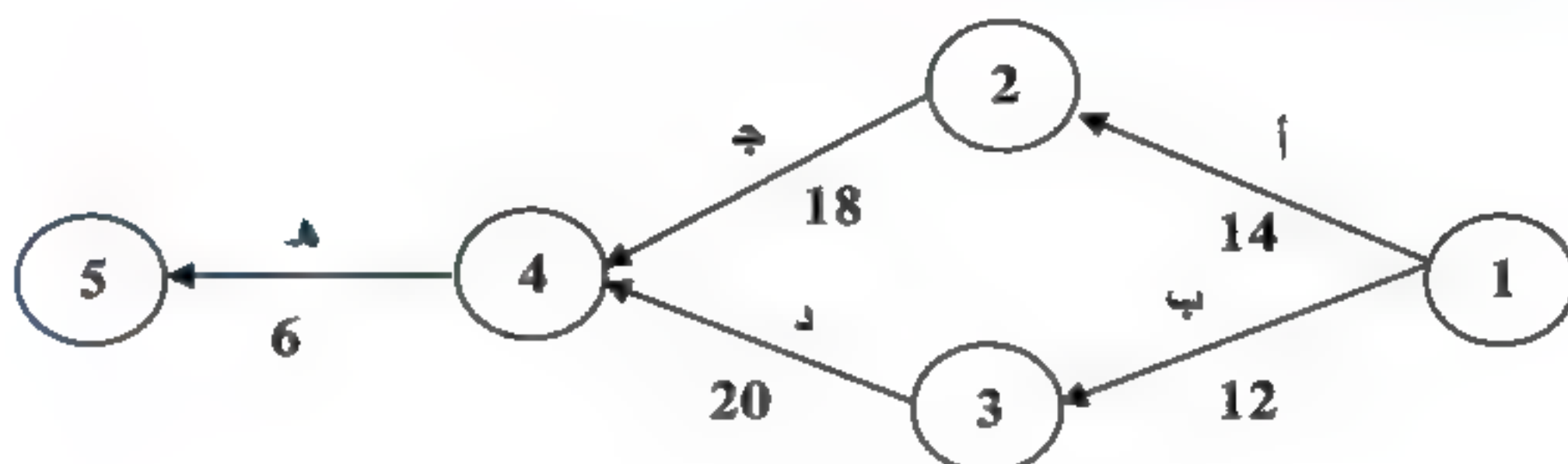
\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ)  
 $= 40 - 38 = 2$  يوم.

نقارن بين حدود فترة التخفيض للنشاط (د) مع الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ) ويتم التخفيض بأقلها كما يلي:

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 4 أيام.

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب د هـ) وطول المسار (أ ج هـ) = 2 يوم.

إذا يتم تخفيض النشاط (د) بمقدار يومين. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 40 - 2 = 38 يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع = التكلفة المتسارعة للنشاط (د) + التكاليف الثابتة  
 = (1680 × 2) + (38 × 2400) = 94560 جنيه.

ويلاحظ من شبكة الأعمال السابقة وجود مسارين حرجان هما:

المسار ب د هـ = 12 + 20 + 6 = 38 يوم.

المسار أ ج هـ = 14 + 18 + 6 = 38 يوم.

التخفيض الرابع: حيث أنه قد ظهر مساران حرجان على الشبكة فلا بد من تخفيضهما معاً كما يلي:

بالنسبة للمسار (ب د هـ) نجد أن النشاط (د) يتبقى من حدود فترة تخفيضه  
 22 - 20 = 2 يوم.

أما بالنسبة للمسار (أ ج هـ) فنجد أن النشاط (أ) لا يمكن تخفيضه، والنشاط (هـ) قد استنفذ حدود فترة تخفيضه ولم يتبقى على هذا المسار إلا النشاط (ج) وحدود فترة التخفيض للنشاط (ج) = 18 - 14 = 4 أيام

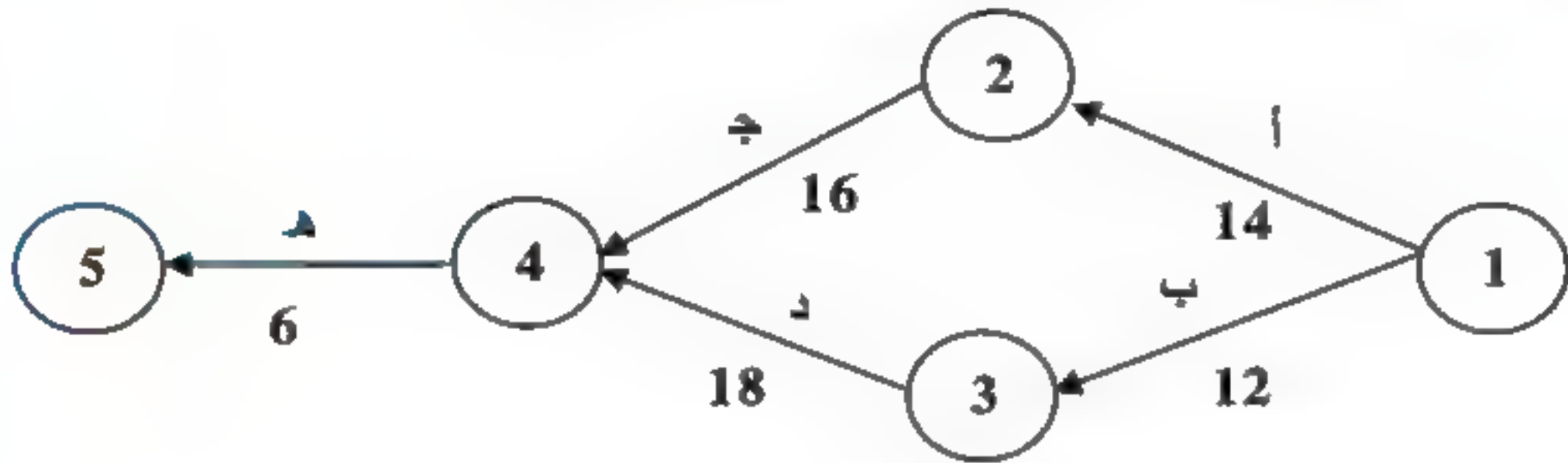
نقارن بين المتبقي من حدود فترة التخفيض للنشاط (د) مع حدود فترة التخفيض للنشاط (ج) ويتم التخفيض بأقلها كما يلي:

\* المتبقي من حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 2 يوم.



\* حدود فترة التخفيض للنشاط (ج) = 4 أيام.

∴ يتم تخفيض كل من النشاط (د) والنشاط (ج) بمقدار (2) يوم. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 38 - 2 = 36 يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع =

التكلفة المتسارعة للنشاط (د) + التكلفة المتسارعة للنشاط (ج) + التكاليف الثابتة  
 $= (1680 \times 2) + (1200 \times 2) + (36 \times 2400) = 92160$  جنيه.

لاحظ أن عملية التخفيض يجب أن تتوقف عند هذا الحد حتى لا يتحول المسار الحرج الأصلي (ب د هـ) إلى مسار حرج آخر وهو (أ ج هـ)، كما أن الأنشطة الواقعة على المسار الحرج الأصلي (ب د هـ) قد استنفذت حدود فترة تخفيضها.

\* وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلي:

\* النشاط (ب) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام ويتكلفت  $(720 \times 4) = 2880$  جنيه

\* النشاط (ج) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم ويتكلفت  $(1200 \times 2) = 2400$  جنيه.

\* النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام ويتكلفت  $(1680 \times 4) = 6720$  جنيه.

\* النشاط (هـ) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وتكلفة (2 × 1440) = 2880 جنيه.

وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (46) يوم إلى (36) يوم. وانخفضت تكاليف تنفيذ المشروع من (110400) جنيه إلى (92160) جنيه.

استخدام أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT) فى تحليل العلاقة بين وقت وتكلفة تنفيذ المشروع.

يستخدم أسلوب بيرت فى تخطيط التكاليف وتخصيص الموارد والرقابة عليها، حيث يوضح هذا الأسلوب فترة إتمام المشروع وأدنى تكلفة ممكنة لتنفيذه، إلا أنه يمكن اختصار فترة التنفيذ هذه على حساب زيادة التكلفة ويطلق على التكلفة فى تلك الحالة بالتكلفة المتسربة.

ويسعى أسلوب بيرت إلى تخفيض فترة إتمام المشروع إلى أدنى حد ممكن مع تحمل أقل قدر من الزيادة فى التكاليف، ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

1- رسم شبكة الأعمال وتحديد الوقت والتكلفة لكل نشاط والمسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية. وتعتبر فترة المسار الحرج عن أطول فترة لتنفيذ المشروع. ويطلق على الوقت والتكلفة فى هذه الحالة الوقت العادى والتكلفة العادية.

2- يتم البحث عن بدائل مختلفة لتخفيض فترة إتمام المشروع وذلك بفحص الأنشطة المختلفة على أن يتم تحديد وقت وتكلفة النشاط فى حالة الإسراع وفقاً لكل بديل. ويطلق على بدائل الوقت والتكلفة فى هذه الحالة التكلفة المتسربة والوقت المتسرع.

3- تحديد ميل التكلفة لكل نشاط من أنشطة المشروع، بمعنى إيجاد التكلفة الإضافية الناتجة عن تخفيض (انقاص) زمن النشاط وحدة زمن واحدة عن طريق المعادلة التالية:



التكلفة المتسركة - التكلفة العادية

الوقت العادى - الوقت المتسرع

ميل التكلفة =

4- حيث أن الهدف هو أكبر قدر من التخييض فى الوقت مع أقل قدر من الزيادة فى تكاليف المشروع، لذلك يجب تخفيض الأنشطة التى تقع على المسار الحرج فقط حيث أن تخفيض وقت تلك الأنشطة هو الذى يؤدى إلى اختصار فترة تنفيذ المشروع، فى حين أن أى تخفيض للأنشطة التى لا تقع على المسار الحرج لن يؤدى إلى اختصار فترة تنفيذ المشروع. وعند تخفيض وقت الأنشطة الواقعة على المسار الحرج يراعى اختيار النشاط صاحب أقل ميل للتكلفة.

ويجب مراعاة المبادئ الآتية عند إجراء عملية التخييض:

1- أن تخفيض أى نشاط على المسار الحرج يكون فى حدود الوقت المسموح به لتخييض النشاط، ويعادل الوقت المسموح به لتخييض النشاط الفرق بين الوقت العادى والوقت المتسرع لتنفيذ النشاط، أى أن حدود فترة التخييض لكل نشاط = الوقت العادى للنشاط - الوقت المتسرع للنشاط.

فإذا كان الوقت العادى لتنفيذ النشاط (و) هو ثمانية أيام مثلاً والوقت المتسرع لتنفيذ نفس النشاط يعادل خمسة أيام فإن الوقت المسموح به لتخييض هذا النشاط يساوى ثلاثة أيام، أى أنه لا يمكن تخفيض وقت ذلك النشاط بأكثر من ثلاثة أيام.

2- أن خفض وقت نشاط معين على المسار الحرج بمقدار معين من الزمن لا يعنى انخفاض فترة تنفيذ المشروع بنفس المقدار من الزمن حيث قد يظهر مسار حرج جديد وبالتالي يجب التخلّى عن المسار الحرج القديم إلى المسار الحرج الجديد. وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخييض نقوم بما يلى:

أ- يتم حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة.

ب- تتم مقارنة بين أقل فرق من الفروق المحسوبة وبين حدود فترة التخفيض للنشاط الذى تم اختياره، حيث تتم المقارنة على الوجه التالى:

- إذا كانت حدود فترة تخفيض النشاط  $\geq$  أقل فرق بين طول المسار الحرج والمسارات الأخرى فى هذه الحالة يتم التخفيض فى حدود فترة تخفيض النشاط.

- إذا كانت حدود فترة التخفيض للنشاط  $<$  أقل فرق بين طول المسار الحرج والمسارات الأخرى فى هذه الحالة يتم التخفيض بأقل فرق.

3- وهكذا تستمر عملية التخفيض على أنشطة المسار الحرج حتى يتم الحصول إلى الوقت اللازم للتخفيض مع مراعاة الأتى:

أ- فى حالة وجود أكثر من نشاط على المسار الحرج نختار النشاط الأقل ميل تكلفة.

ب- فى حالة ظهور أكثر من مسار حرج على الشبكة نخفضهما معاً بحيث نختار النشاط الذى له أقل ميل تكلفة على كل من المسارين ونحدد حدود فترة التخفيض الخاصة بكل منهما.

أى أنه فى حالة تعدد المسارات الحرجة وظهور أكثر من مسار حرج فى نفس الوقت فإنه من الضرورى تخفيض وقت المسارات الحرجة كلها معاً وفى آن واحد على أن تكون فترة التخفيض هى أدنى وقت مسموح به للأنشطة ذات أقل ميل تكلفة، فمثلاً إذا كان هناك مساران حرجان وكان يمكن تخفيض النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج الأول بمقدار (3) أيام فى حين أن النشاط صاحب أقل ميل تكلفة على المسار الحرج الثانى يمكن تخفيضه بمقدار (4) أيام فإنه يتم تخفيض النشاطين صاحباً أقل ميل تكلفة على المسارين الحرجين بمقدار (3) أيام فقط.



وفي بعض الحالات قد يكون هناك نشاط مشترك في مسارين حرجين (أو أكثر) وبالرغم من أن هذا النشاط المشترك قد لا يكون صاحب أقل ميل للتكلفة إلا أن ميل تكلفته قد يقل عن مجموع ميل التكلفة الخاص بنشاطين كل مهما على مسار حرج مختلف، وفي هذه الحالة يتم تخفيض النشاط المشترك بالرغم من أنه ليس صاحب أقل ميل تكلفة.

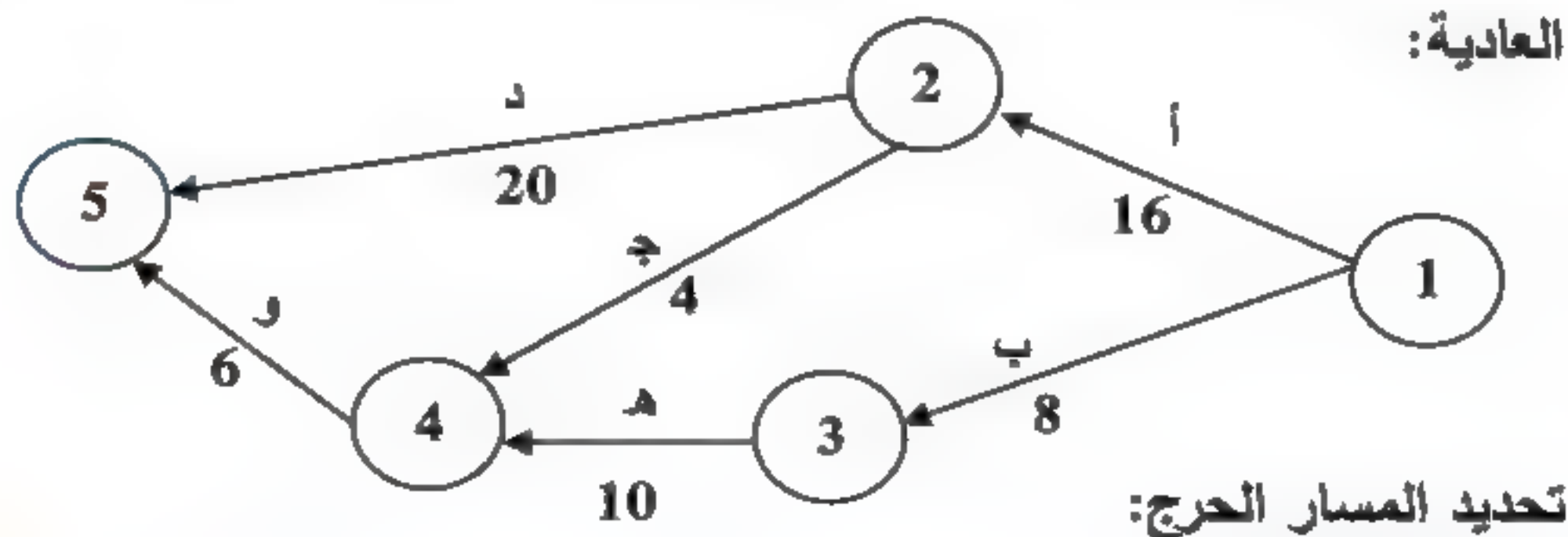
مثال (2): بفرض أنه توافرت لديك البيانات التالية واللازمة لتنفيذ إحدى المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت باليوم		التكاليف بالجنيه	
		المتسرع	العادي	المتسعة	العادية
أ	2-1	12	16	400	200
ب	3-1	4	8	700	300
ج	4-2	2	4	180	100
د	5-2	10	20	800	200
هـ	4-3	2	10	400	200
و	5-4	2	6	200	160

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة في تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع في (30) يوم.

### الحل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



المسار أ د = 16 + 20 = 36 يوم.

المسار أ ج و = 16 + 4 + 6 = 26 يوم.

المسار ب ه و = 8 + 10 + 6 = 24 يوم.

∴ المسار الحرج هو (أ د) لأنه أطول مسار على الشبكة.

وبالتالى فإن الوقت اللازم لإتمام المشروع بالكامل = 36 يوم.

\* التكاليف العادية فى هذه الحالة

= 200 + 300 + 100 + 200 + 200 + 160 = 1160 جنيه.

الخطوة الثانية: تحديد ميل التكلفة وحدود فترة التخفيض لكل نشاط من أنشطة المشروع كما يتضح فى الجدول التالى:

النشاط	ميل التكلفة = $\frac{\text{التكلفة المتسّعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادى} - \text{الوقت المتسّرع}}$	حدود فترة التخفيض للنشاط = $\text{الوقت العادى} - \text{الوقت المتسّرع (باليوم)}$
أ	$50 = (200 - 400) \div (12 - 16)$	4 - 12 - 16
ب	$100 = (300 - 700) \div (4 - 8)$	4 - 4 - 8
ج	$40 = (100 - 180) \div (2 - 4)$	2 - 2 - 4
د	$60 = (200 - 800) \div (10 - 20)$	10 - 10 - 20
هـ	$25 = (200 - 400) \div (2 - 10)$	8 - 2 - 10
و	$10 = (160 - 200) \div (2 - 6)$	4 - 2 - 6

الخطوة الثالثة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

حيث أن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ = 30 يوم فقط، بينما الوقت العادى لتنفيذ المشروع طبقاً للتقديرات العادية = 36 يوم. لذا يجب العمل على تخفيض الوقت العادى بما يمكننا من تنفيذ المشروع خلال الفترة المتعاقد عليها وهى (30) يوم.

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج وهو (أ د) حيث نجد أن:

ميل التكلفة للنشاط (أ) = 50 ← يتم اختياره



ميل التكلفة للنشاط (د) = 60

∴ يتم اختيار النشاط (أ) لتخفيض وقته وحدود فترة التخفيض للنشاط (أ) =  
16 - 12 = 4 أيام

وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بالآتي:  
(1) يتم حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة:

\* الفرق بين طول المسار الحرج (أد) وطول المسار (أ ج و)  
= 36 - 26 = 10 أيام.

\* الفرق بين طول المسار الحرج (أد) وطول المسار (ب ه و)  
= 36 - 24 = 12 يوم.

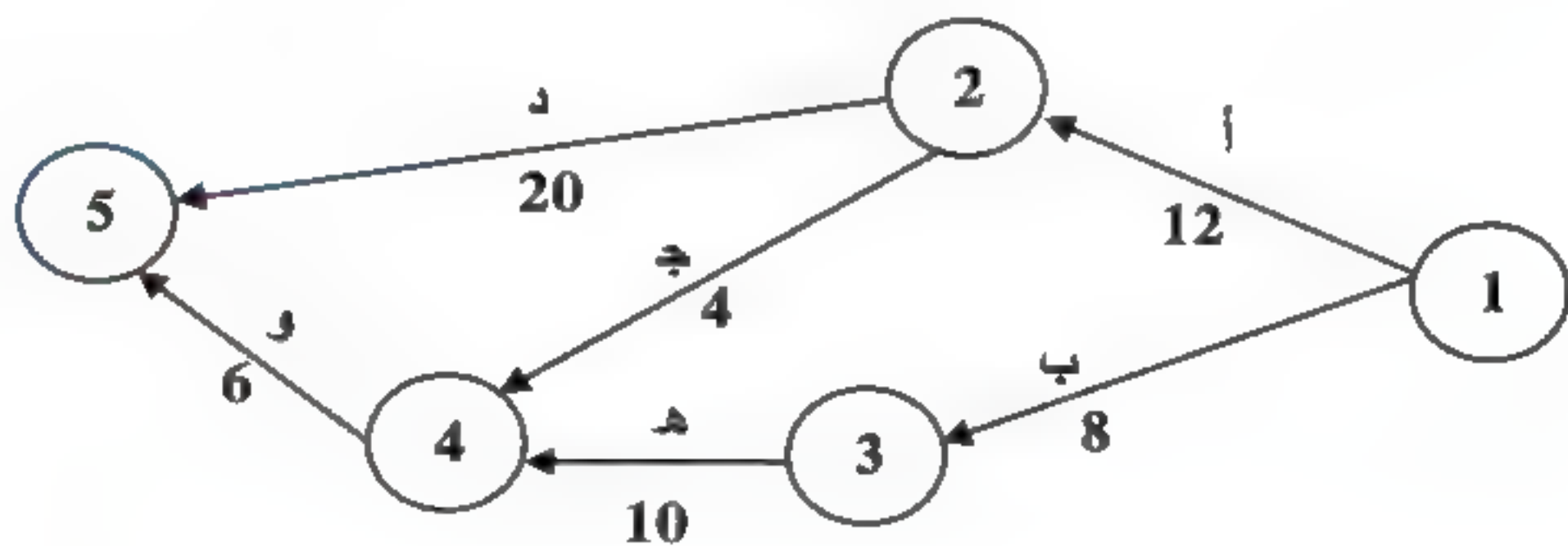
(2) تتم المقارنة بين أقل فرق من الفروق المحسوبة وبين حدود فترة التخفيض للنشاط (أ) حيث نجد أن:

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (أ) = 4 أيام.

\* أقل فرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى = 10 أيام.

∴ يتم تخفيض النشاط (أ) بحدود فترة تخفيضه بالكامل وهي (4 أيام) دون الخوف من تحول المسار الحرج.

وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع =  $36 - 4 = 32$  يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 1160 + (50 \times 5) = 1360 \text{ جنيه}$$

يتضح من شبكة الأعمال السابقة بأن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ (30 يوم) في حين أن الوقت اللازم للتنفيذ مازال أكبر من الوقت المتعاقد عليه بمقدار (2) يوم الأمر الذي يتطلب متابعة عملية التخفيض.

**التخفيض الثاني:** يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط (أ) قد استنفذ فترة تخفيضه بالكامل، لذلك لا يوجد أمامنا إلا النشاط (د) وحدود فترة التخفيض للنشاط (د) =  $(20 - 10) = 10$  أيام.

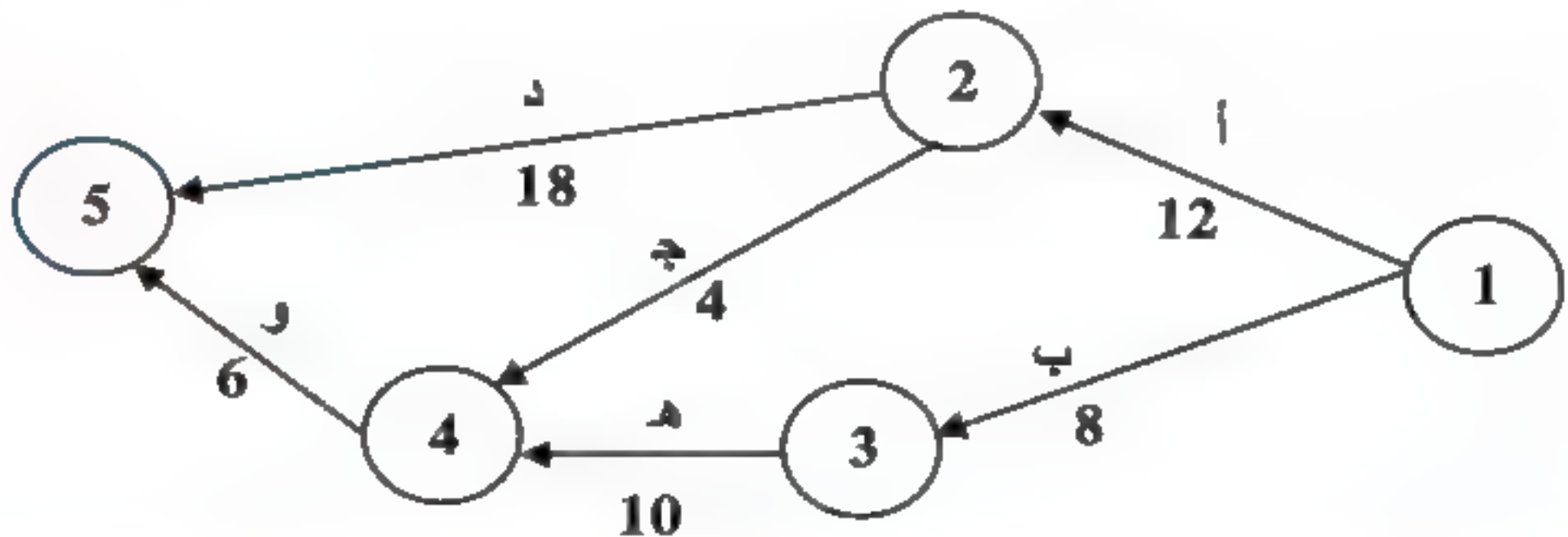
\* وحتى نضمن عدم تحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بحساب الفرق بين طول المسار الحرج الجديد (بعد تخفيض النشاط (أ) بمقدار (4) أيام) وطول المسارات الأخرى على الشبكة

- الفرق بين المسار الحرج (أ د) وطول المسار (أ ج و) =  $32 - 22 = 10$  أيام.

- الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (ب ه و) =  $32 - 24 = 8$  أيام.

وبما أن الوقت المطلوب تخفيضه هو يومان فقط وهي أقل من أقل فرق ∴ سينخفض النشاط (د) بمقدار (2) يوم فقط.

وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:





∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع =  $32 - 2 = 30$  يوم.

وبالتالي فإن الوقت اللازم لتنفيذ المشروع = الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ = 30 يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 1360 + (60 \times 2) = 1480 \text{ جنيه}$$

\* وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلي:

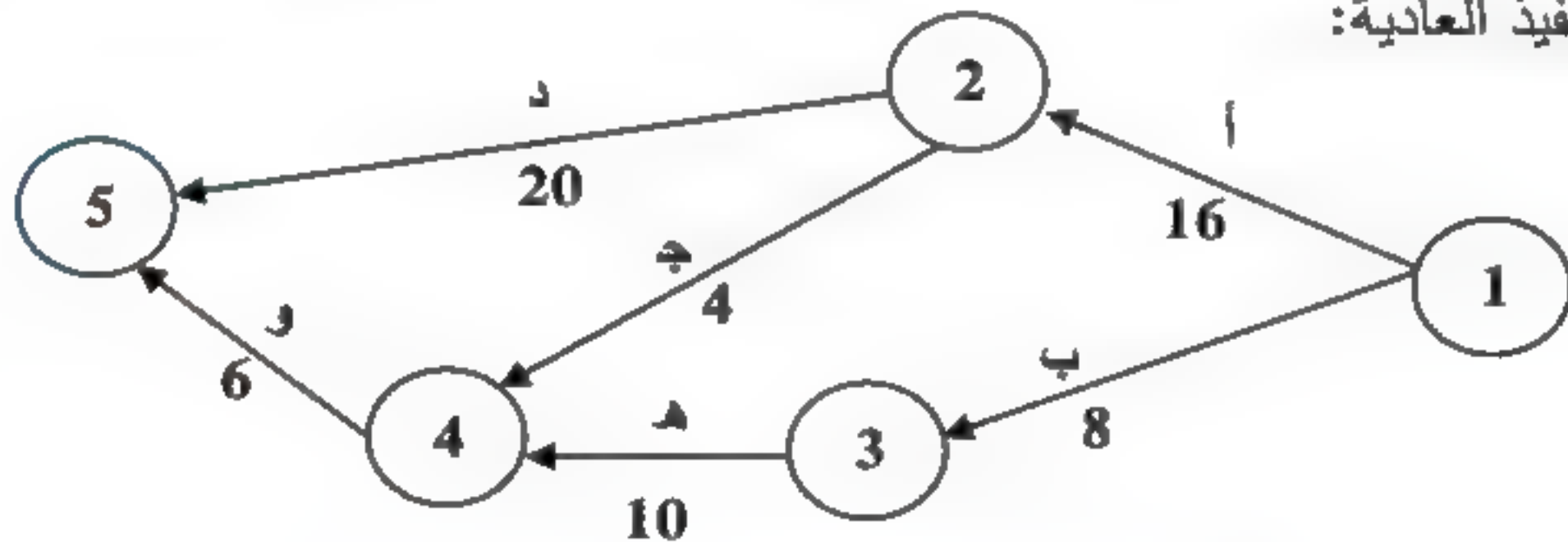
النشاط (أ) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة  $(50 \times 4) = 200$  جنيه.

النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة  $(60 \times 2) = 120$  جنيه.

وبالتالي تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (36) يوم إلى (30) يوم. وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (1160) جنيه إلى (1480) جنيه.

مثال (3): في المثال السابق (رقم 2) استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذي يمكن الوصول إليه.

الحل: الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



\* المسار الحرج هو (أ د) وطوله = 36 يوم.

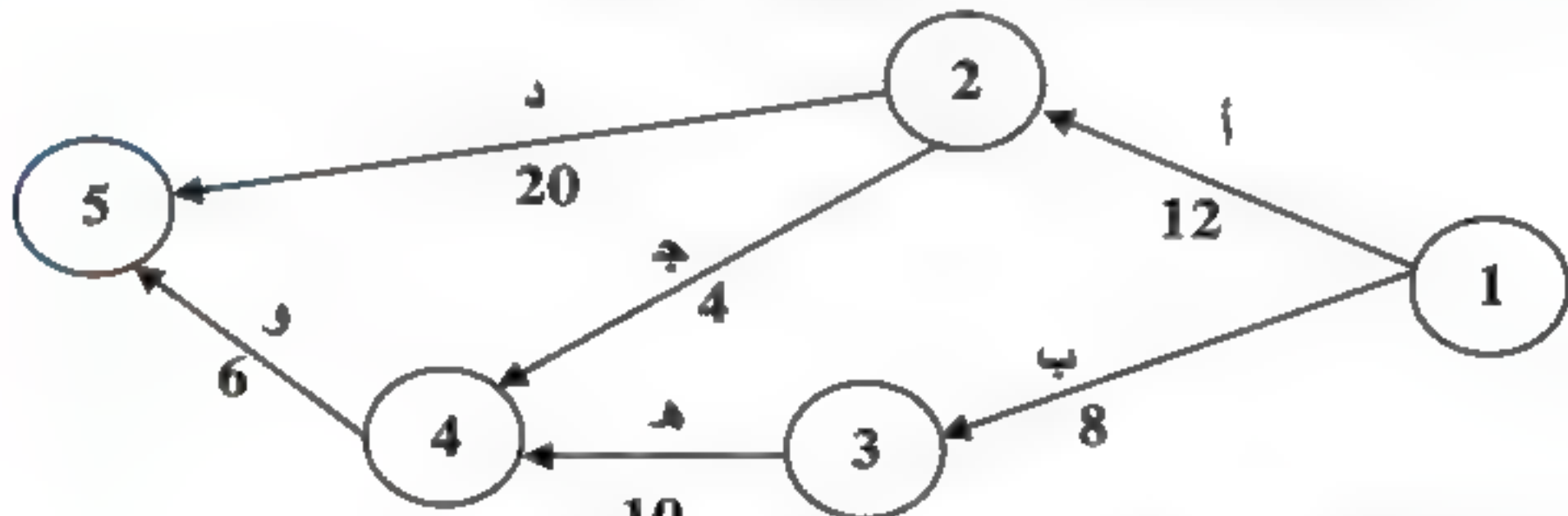
\* التكاليف العادية في الحالة

$$= 200 + 300 + 100 + 200 + 200 + 160 = 1160 \text{ جنيه.}$$

الخطوة الثانية: بما أننا نريد تخفيض الوقت اللازم لتنفيذ المشروع إلى أدنى حد ممكن، فإننا سنركز على أنشطة المسار الحرج (أ د):

التخفيض الأول: نختار النشاط (أ) لأنه النشاط صاحب أقل ميل للتكلفة (50) في حين أن النشاط (د) ميل تكلفته (60).

وحيث أن حدود فترة تخفيض النشاط (أ)  $= 16 - 12 = 4$  أيام وهي أقل من أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسارات الأخرى (أ ج و) (ب ه و) على الشبكة (10 ، 12) يوم على الترتيب. إذاً نخفض النشاط (أ) في حدود فترة تخفيضه بالكامل وهي (4) أيام. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع  $= 36 - 4 = 32$  يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 1160 + (50 \times 4) = 1360 \text{ جنيه}$$

ومن شبكة الأعمال السابقة يتضح أن طول المسار الحرج (أ د)  $= 32$  يوم. التخفيض الثاني: حيث أن النشاط (أ) قد استنفذ حدود فترة تخفيضه بالكامل ولم يتبقى في المسار الحرج (أ د) سوى النشاط (د) لذلك نحاول تخفيض النشاط (د) كما يلي:

\* حدود فترة تخفيض النشاط (د)  $= 20 - 10 = 10$  أيام.

\* الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (أ ج و)

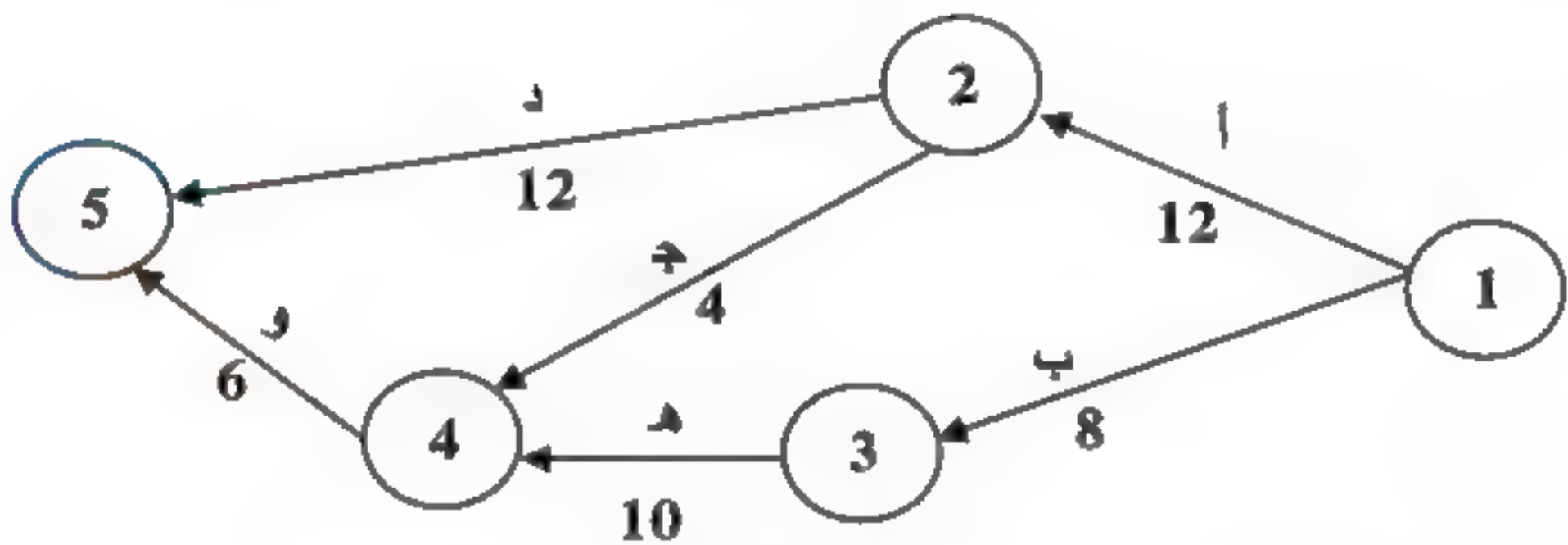


$$= 32 - 22 = 10 \text{ أيام.}$$

\* الفرق بين طول المسار الحرج (أ د) وطول المسار (ب ه و)

$$= 32 - 24 = 8 \text{ أيام.}$$

وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (د) = 10 أيام وهى أكبر من أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وأطوال المسارات الأخرى المبينة فى شبكة الأعمال السابقة. لذلك سينخفض النشاط (د) بأقل فرق وهو (8) أيام لتصبح شبكة الأعمال الجديدة بعد تخفيض النشاط (د) بمقدار (8) أيام كما يلى:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 32 - 8 - 24 = يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 1360 + (60 \times 8) = 1840 \text{ جنيه.}$$

يلاحظ من شبكة الأعمال السابقة أنه هناك مساران حرجان وهما (أ د)،

(ب ه و) ويبلغ طول كل منهما (24).

التخفيض الثالث: حيث أنه قد ظهر مساران حرجان فلابد من تخفيضهما معاً كما يلى:

- نختار النشاط الذى له أقل ميل تكلفة على المسار (ب ه و) فنجده النشاط

(و) وحدود فترة تخفيضه (4) أيام.

- يتبقى النشاط (د) على المسار الحرج (أ د) ويمكن تخفيضه بمقدار يومين فقط (وهي الفترة الباقية من حدود فترة تخفيضه 10 أيام، حيث تم تخفيضه قبل ذلك بمقدار 8 أيام).

- نقارن حدود فترة تخفيض النشاط (د) مع حدود فترة تخفيض النشاط (و) مع أقل فرق بين طول المسار الحرج (أ د) وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة ويتم التخفيض بأقلها كما يلي:

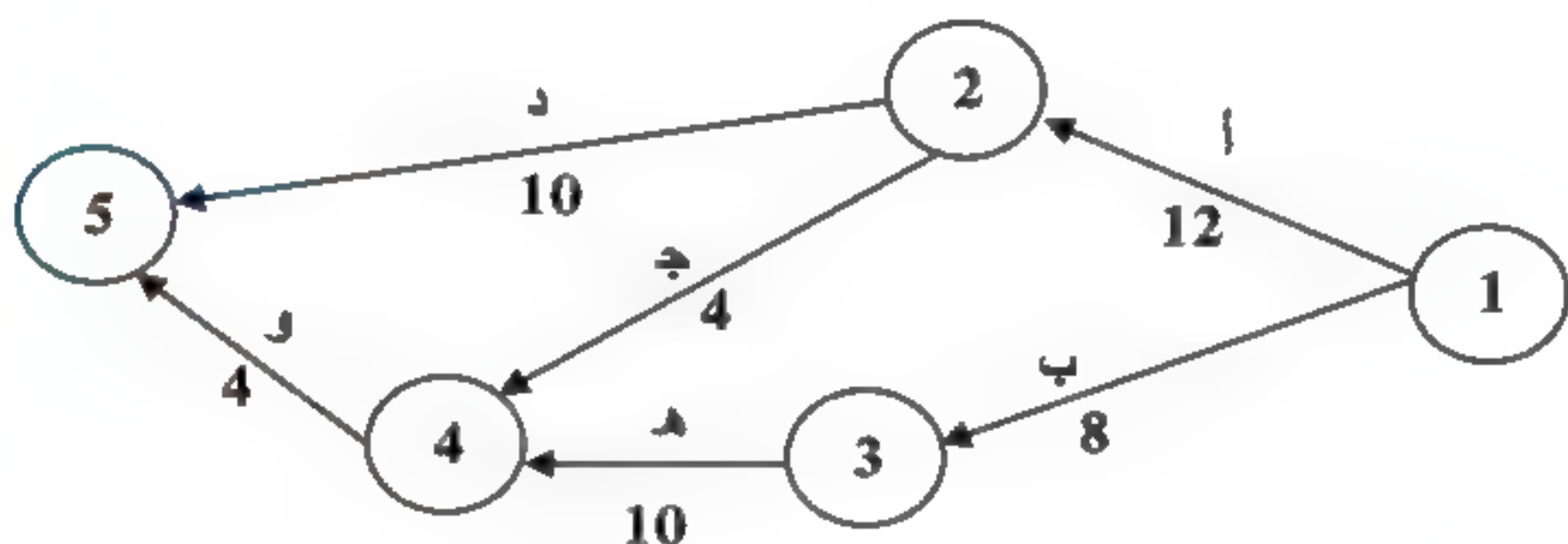
\* المتبقي من حدود فترة تخفيض النشاط (د) = 2 يوم.

\* حدود فترة تخفيض النشاط (و) = 4 أيام.

\* أقل فرق بين طول المسار الحرج سواء (أ د) أو (ب هـ و) وطول المسار

(أ ج و) =  $24 - 22 = 2$  يوم.

إذا سيتم تخفيض كلا النشاطين (د)، (و) بمقدار (2) يوم لكل منهما. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع =  $24 - 2 = 22$  يوم.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 1840 + (60 \times 2) + (10 \times 2) = 1980 \text{ جنيه.}$$

يظهر من شبكة الأعمال السابقة أن حدود فترة التخفيض لجميع الأنشطة الواقعة على المسار الحرج (أ د) قد استنفذت بالكامل، وهذا معناه أنه لا يمكن



إجراء أى تخفيض آخر على هذا المسار، لذلك، تتوقف عملية التخفيض حتى ولو كان ذلك ممكناً على غيره من المسارات لأنه لو أجرى تخفيض على أى مسار آخر فإن المشروع سيتحمل تكاليف اضافية دون تأثير ذلك تخفيض الوقت الكلى اللازم لتنفيذ المشروع.

**\* وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلي:**

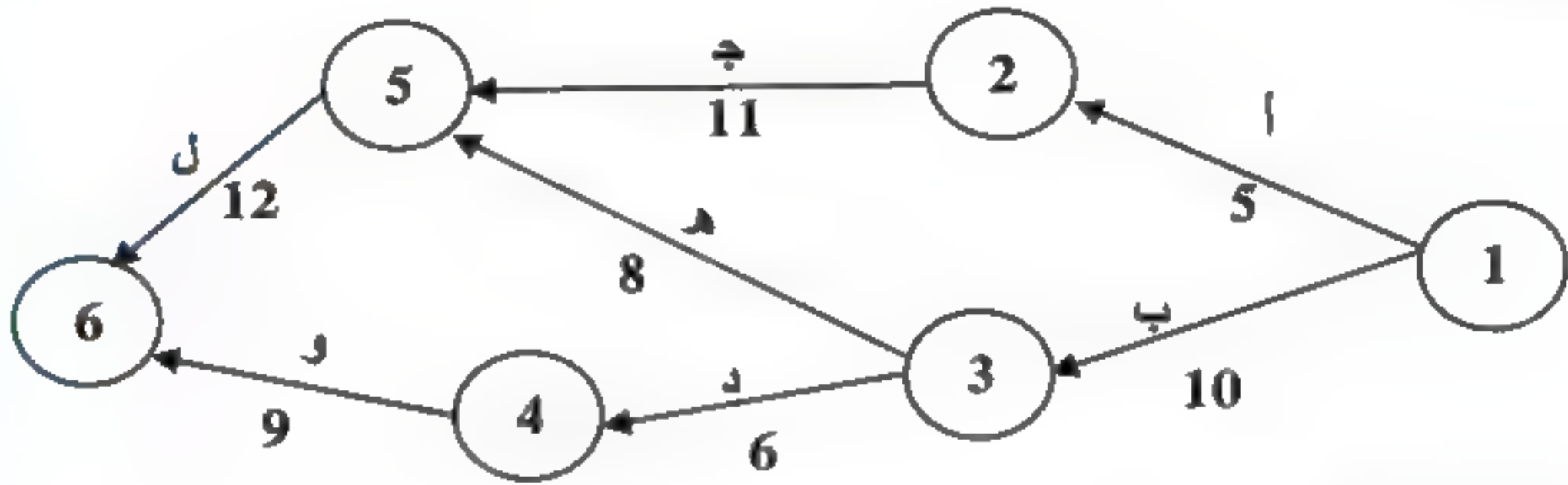
النشاط (أ) تم تخفيضه بمقدار (4) أيام وبتكلفة  $(50 \times 4) = 200$  جنيه.  
النشاط (د) تم تخفيضه بمقدار (10) يوم وبتكلفة  $(60 \times 10) = 600$  جنيه.  
النشاط (و) تم تخفيضه بمقدار (2) يوم وبتكلفة  $(10 \times 2) = 20$  جنيه.  
وبالتالى تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (36) يوم إلى (22) يوم. وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (1160) جنيه إلى (1980) جنيه.  
**مثال (4):** إذا توفرت لديك البيانات التالية واللازمة لتنفيذ إحدى المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		العادى	المتسرع	العادية	المتسبعة
أ	2-1	5	3	4000	5600
ب	3-1	10	7	7200	9600
ج	5-2	11	8	6000	7200
د	4-3	6	5	2000	2600
هـ	5-3	8	4	1200	2800
و	6-4	9	8	4800	6000
ل	6-5	12	8	2400	3600

**المطلوب:** استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة فى تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع فى 23 أسبوع.

## الحل

الخطوة الأولى: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج وفقاً لبيانات التنفيذ العادية:



تحديد المسار الحرج:

المسار أ ج ل =  $5 + 11 + 12 = 28$  أسبوع.

المسار ب هـ ل =  $10 + 8 + 12 = 30$  أسبوع.

المسار ب د و =  $10 + 6 + 9 = 25$  أسبوع.

∴ المسار الحرج هو (ب هـ ل) وزمنه = 30 أسبوع.

الوقت اللازم لإتمام المشروع بالكامل = 30 أسبوع وهو نفس طول المسار

الحرج. وحدود فترة التخفيض الممكنة =  $30 - 23 = 7$  أسابيع

\* التكاليف العادية في هذه الحالة

=  $4000 + 7200 + 6000 + 2000 + 1200 + 4800 + 2400 = 27600$  جنيه

الخطوة الثانية: تحديد ميل التكلفة وحدود فترة التخفيض لكل نشاط من

أنشطة المشروع كما يتضح من الجدول التالي:



النشاط	ميل التكلفة = $\frac{\text{التكلفة المتسركة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرك}}$	حدود فترة التخفيض للنشاط = $\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المتسرك (أسبوع)}$
أ	$800 = (3 - 5) \div (4000 - 5600)$	$2 = 3 - 5$
ب	$800 = (7 - 10) \div (7200 - 9600)$	$3 = 7 - 10$
ج	$400 = (8 - 11) \div (6000 - 7200)$	$3 = 8 - 11$
د	$600 = (5 - 6) \div (2000 - 2600)$	$1 = 5 - 6$
هـ	$400 = (4 - 8) \div (1200 - 2800)$	$4 = 4 - 8$
و	$1200 = (8 - 9) \div (4800 - 6000)$	$1 = 8 - 9$
ل	$300 = (8 - 12) \div (2400 - 3600)$	$4 = 8 - 12$

### الخطوة الثالثة: إجراء عملية التخفيض الممكنة:

حيث أن الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ = 23 أسبوع فقط، بينما الوقت العادي لتنفيذ المشروع طبقاً للتقديرات العادية = 30 أسبوع لذا يجب العمل على تخفيض الوقت العادي بما يمكننا من تنفيذ المشروع خلال الفترة المتعاقد عليها وهي (23) أسبوع.

التخفيض الأول: نركز على أنشطة المسار الحرج وهي (ب هـ ل) حيث نجد أن:

$$\text{ميل التكلفة للنشاط (ب)} = 800$$

$$\text{ميل التكلفة للنشاط (هـ)} = 400$$

$$\text{ميل التكلفة للنشاط (ل)} = 300$$

يتم اختيار النشاط (ل) صاحب أقل ميل تكلفة، وحدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = (4) أسابيع.

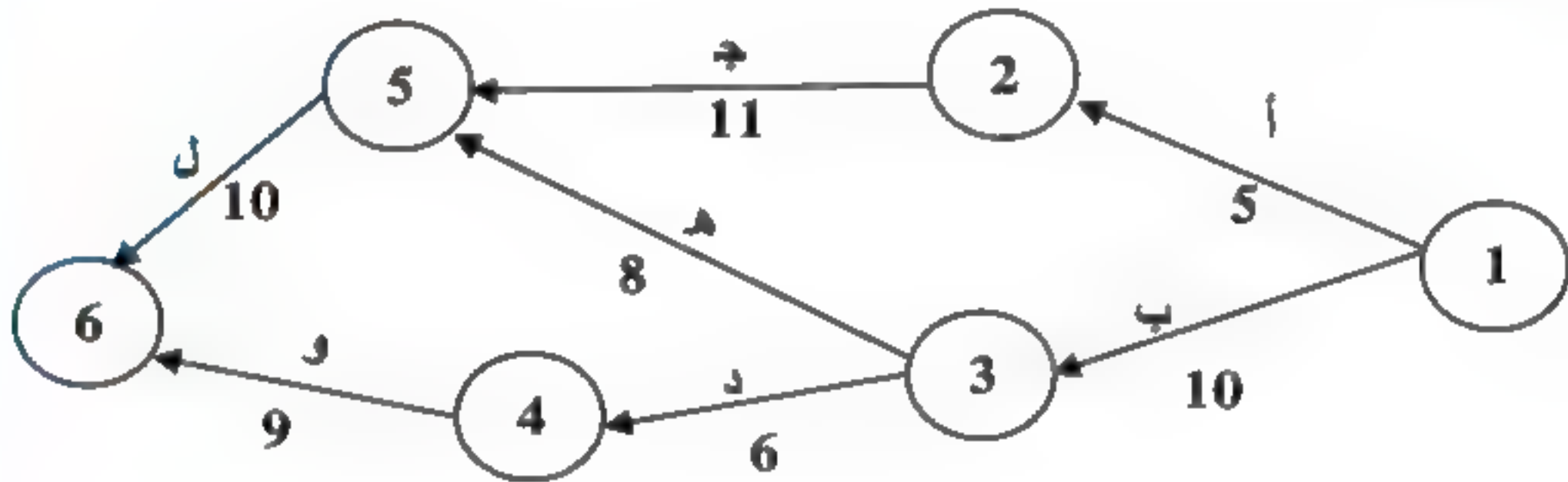
وحتى نضمن ألا يتحول المسار الحرج أثناء عملية التخفيض نقوم بالآتي:

\* حساب الفرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة:

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (أ ج ل) =  $30 - 28 = 2$  أسبوع.

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (ب د و) =  $30 - 25 = 5$  أسابيع.

وحيث أن حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = 4 أسابيع وهي أكبر من أقل فرق بين طول المسار الحرج وأطوال المسارات الأخرى، ففي هذه الحالة يتم تخفيض النشاط (ل) بأقل فرق وهو (2) أسبوع. وتصبح شبكة الأعمال الجديدة كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع =  $30 - 2 = 28$  أسبوع.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 27600 + (300 \times 2) = 28200 \text{ جنيه.}$$

مازال المسار الحرج هو (ب ه ل) ولكن أصبح طوله =

$$10 + 8 + 10 = 28 \text{ أسبوع.}$$

التخفيض الثاني: مازال النشاط (ل) واقعاً على المسار الحرج، كما أنه مازال صاحب أقل ميل تكلفة. ثم مازال أيضاً وقت تنفيذه يسمح بتخفيضه (حيث يتبقى أسبوعان من حدود فترة تخفيض النشاط (ل)).

\* المتبقى من حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) = 2 أسبوع.

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (أ ج ل)



$$= 28 - 26 = 2 \text{ أسبوع.}$$

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (ب د و)

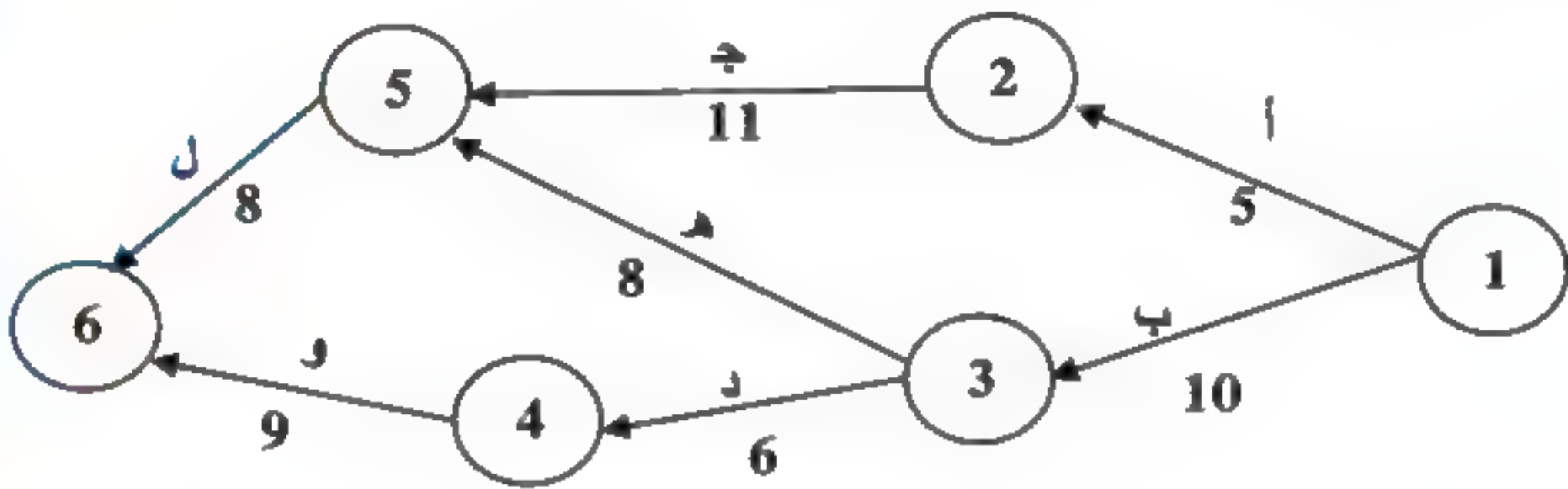
$$= 28 - 25 = 3 \text{ أسابيع.}$$

∴ أقل فرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وأطوال المسارات الأخرى على

الشبكة = 2 أسبوع. وحيث أن المتبقى من حدود فترة التخفيض للنشاط (ل) =

2 أسبوع، إذا يتم تخفيض النشاط (ل) بمقدار (2) أسبوع. وتصبح شبكة

الأعمال الجديدة بعد هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 28 - 2 = 26 أسبوع.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 28200 + (2 \times 300) = 28800 \text{ جنيه}$$

ما زال المسار الحرج هو (ب ه ل) ولكن أصبح طوله

$$= 10 + 8 + 8 = 26 \text{ أسبوع.}$$

التخفيض الثالث: يتم التركيز على أنشطة المسار الحرج، وحيث أن النشاط

(ل) قد استنفذ فترة تخفيضه بالكامل، لذلك يتم اختيار النشاط صاحب أقل ميل

تكلفة بعد ذلك وهو النشاط (ه)

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (ه) = 8 - 4 = 4 أسابيع.

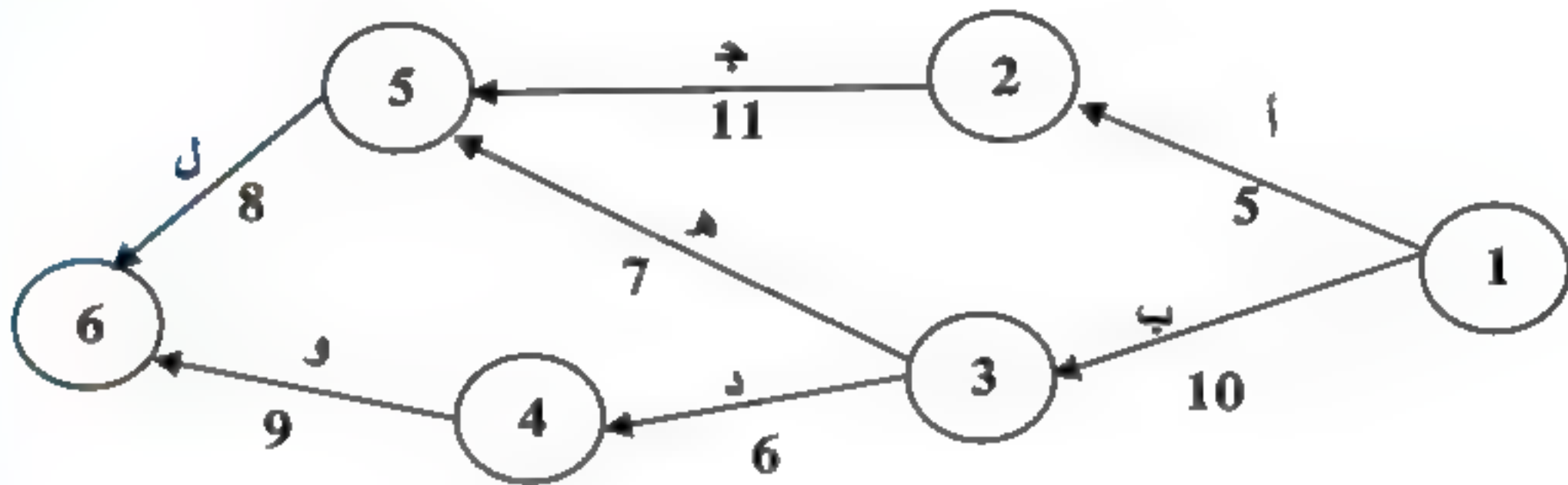
\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (أ ج ل)

$$= 26 - 24 = 2 \text{ أسبوع.}$$

\* الفرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وطول المسار (ب د و)

$$= 26 - 25 = (1) \text{ أسبوع}$$

∴ أقل فرق بين طول المسار الحرج (ب ه ل) وأطوال المسارات الأخرى على الشبكة = واحد أسبوع. إذا يتم تخفيض النشاط (هـ) بمقدار (1) أسبوع. وتصبح شبكة الأعمال الجديدة بعد هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = 26 - 1 = 25 أسبوع.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 28800 + (1 \times 400) = 29200 \text{ جنيه}$$

ويلاحظ من شبكة الأعمال السابقة أن هناك مسارين حرجان وهما:

المسار (ب ه ل) = 10 + 7 + 8 = 25 أسبوع.

المسار (ب د و) = 10 + 6 + 9 = 25 أسبوع.

التخفيض الرابع: حيث أنه قد ظهر مسارين حرجان فلا بد من تخفيضهما معاً كما يلي:

يعتبر النشاط (ب) نشاطاً مشتركاً بين المسارين (ب ه ل) و (ب د و) ، لذلك يتم اختياره للتخفيض برغم ارتفاع ميل تكلفته حيث بلغت (800) جنيه، ويلاحظ أنهذه التكلفة بالرغم من ارتفاعها إلا أنها تعد أقل من مجموع ميل

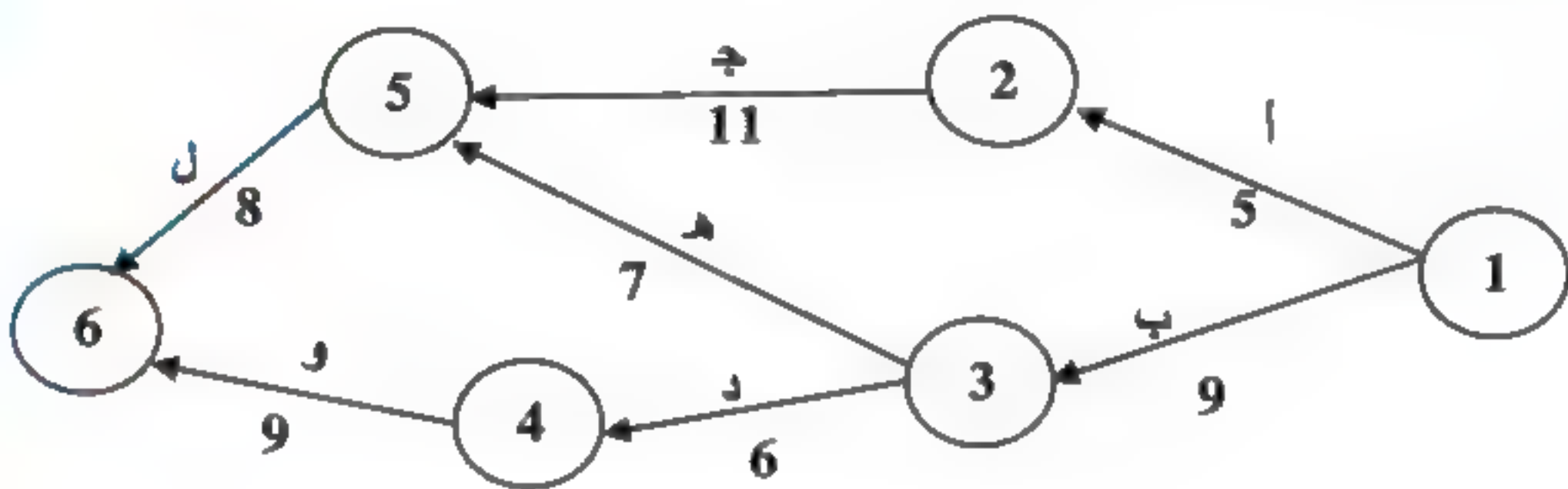


تكلفة نشاطين مختلفين يقع كل منهما على مسار حرج واحد وبناءً على ذلك يتم تخفيض وقت النشاط (ب) كما يلي:

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (ب)  $= 10 - 7 = 3$  أسبوع.

\* الفرق بين طول المسار الحرج سواء (ب ه ل) أو (ب د و) مع طول المسار (أ ج ل)  $= 25 - 24 = 1$  أسبوع.

∴ يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار (1) أسبوع. وتظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع  $= 25 - 1 = 24$  أسبوع.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 29200 + (800 \times 1) = 30000 \text{ جنيه}$$

ويظهر من شبكة الأعمال السابقة وجود ثلاثة مسارات حرجة كما يلي:

المسار (ب ه ل)  $= 9 + 7 + 8 = 24$  أسبوع.

المسار (أ ج ل)  $= 5 + 11 + 8 = 24$  أسبوع.

المسار (ب د و)  $= 9 + 6 + 9 = 24$  أسبوع.

التخفيض الخامس:

\* يتم اختيار النشاط (ب) لتخفيضه مرة أخرى (لاحظ أن المتبقى من حدود

فترة تخفيض النشاط (ب)  $= 2$  أسبوع) باعتباره نشاطاً مشتركاً بين المسار

(ب ه ل) والمسار (ب د و).

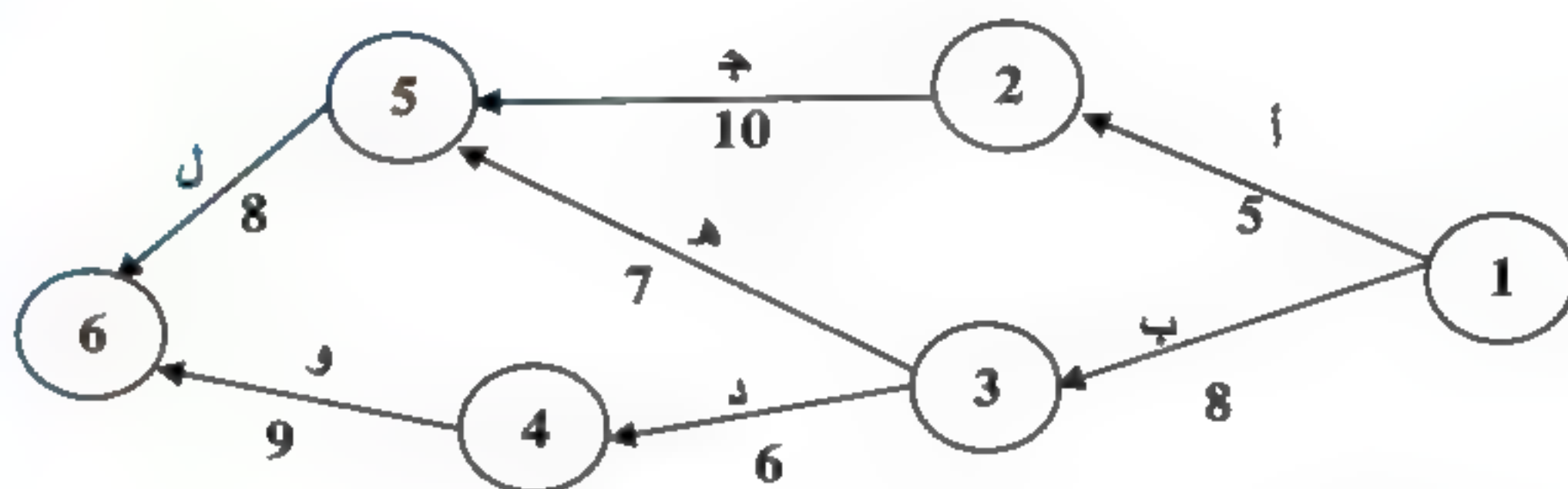
\* أما فيما يتعلق بالمسار (أ ج ل) فيتم اختيار النشاط (ج) وذلك لأنه صاحب أقل ميل تكلفة في هذا المسار بعد النشاط (ل) والذي استنفذ حدود فترة تخفيضه بالكامل.

\* حدود فترة التخفيض للنشاط (ج)  $= 11 - 8 = 3$  أسبوع.

\* المتبقى من حدود فترة تخفيض النشاط (ب)  $= 2$  أسبوع.

\* الوقت المتعاقد عليه لتنفيذ المشروع  $= 23$  أسبوع.

∴ يتم تخفيض كل من النشاط (ب) والنشاط (ج) بمقدار (1) أسبوع، حتى يصل الوقت اللازم لتنفيذ المشروع إلى الوقت المتعاقد عليه للتنفيذ وهو (23) أسبوع. وبالتالي تظهر شبكة الأعمال الجديدة بعد إجراء هذا التخفيض كما يلي:



∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع  $= 24 - 1 = 23$  أسبوع.

\* تكاليف تنفيذ المشروع بعد التخفيض

$$= 30000 + (800 \times 1) + (400 \times 1) = 31200 \text{ جنيه}$$

\* وتتمثل خطة التخفيض للأنشطة فيما يلي:

النشاط (ل) تم تخفيضه بمقدار (4) أسبوع ويتكلفة  $(300 \times 4) = 1200$  جنيه.

النشاط (ب) تم تخفيضه بمقدار (2) أسبوع ويتكلفة  $(800 \times 2)$



= 1600 جنيه.

النشاط (هـ) تم تخفيضه بمقدار (1) أسبوع ويتكلفت (1 × 400)  
= 400 جنيه.

النشاط (ج) تم تخفيضه بمقدار (1) أسبوع ويتكلفت (1 × 400)  
= 400 جنيه.

وبالتالي تم تخفيض وقت إتمام المشروع من (30) أسبوع إلى (23) أسبوع.  
وزادت تكاليف تنفيذ المشروع من (27600) جنيه إلى (31200) جنيه.

## تمارين علي الفصل التاسع

تمرين (1): إذا توافرت لديك المعلومات التالية عن الأنشطة الضرورية اللازمة للإنتهاء من أحد المشروعات الإنتاجية:

النشاط	مسار النشاط	الوقت باليوم		معدل الزيادة في التكاليف المتغيرة يومياً بالجنيه
		المتسرع	العادي	
أ	2-1	2	7	10
ب	3-1	2	7	10
ج	4-1	3	8	4
د	5-2	1	1	15
هـ	5-3	1	5	12
و	6-4	6	8	8
ي	6-5	2	5	15

فإذا علمت أن التكاليف الثابتة لهذا المشروع = 20 جنيه / يومياً.

المطلوب: رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج، ثم تخفيض الفترة اللازمة لإنهاء أعمال المشروع إلى الحد الأقصى الذي يمكن الوصول إليه.

تمرين (2): يبين الجدول التالي التكلفة العادية والتكلفة المتسعة والوقت العادي والوقت المتسرع للأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		المتسرع	العادي	المتسعة	العادية
أ	2-1	8	10	120	100
ب	3-2	5	7	80	63
ج	4-2	3	6	60	42
د	5-3	5	8	71	56
هـ	5-4	3	5	38	30



**المطلوب:** استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة في تحديد الحد الأدنى للتكلفة لإتمام المشروع في 19 أسبوع.

**تمرين (3):** يبين الجدول التالي التكلفة العادية والتكلفة المتسعة والوقت العادي والوقت المتسرع للأنشطة اللازمة لتنفيذ أحد المشروعات:

النشاط	مسار النشاط	الوقت بالأسبوع		التكاليف بالجنيه	
		العادي	المتسرع	العادية	المتسعة
أ	2-1	3	2	800	1400
ب	3-1	2	1	1200	1900
ج	4-2	5	3	2000	2800
د	4-3	5	3	1500	2300
هـ	6-4	6	4	1800	2800
و	5-4	2	1	600	1000
ى	6-5	2	1	500	1000

**المطلوب:** استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذى يمكن الوصول إليه.

**تمرين (4):** فيما يلى البيانات الخاصة بوقت وتكلفة إنجاز الأنشطة اللازمة لأحد المشروعات:

النشاط	النشاط السابق	الوقت باليوم		التكلفة بالجنيه	
		العادي	المتسرع	العادية	المتسعة
أ	-	2	1	6	10
ب	أ	5	2	9	18
ج	أ	4	3	6	8
د	ب ، ج	3	1	5	9

**المطلوب:**

1- تحديد أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وتكلفة التنفيذ العادية للمشروع.

2- بفرض أن هناك ميزانية إضافية للمشروع قدرها (11) جنيه. ضع خطة لتوزيع هذه الميزانية بين الأنشطة حتى نصل إلى أقل وقت إتمام للمشروع بأقل تكلفة ممكنة.

تمرين (5): إذا توافرت لديك البيانات التالية عن أحد المشروعات الواجب تنفيذها:

النشاط	النشاط السابق	التكلفة بالجنيه		الوقت باليوم	
		العادية	المتسعة	العادي	المتسرع
أ	-	500	800	7	4
ب	أ	200	350	3	2
ج	-	500	900	6	4
د	ج	200	500	3	1
هـ	ب ، ج	300	550	2	1

المطلوب: استخدام أسلوب بيرت/ تكلفة لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ هذا المشروع إلى الحد الأقصى الذي يمكن الوصول إليه.





## قائمة المراجع

### أولاً: المراجع العربية:

- البكري، سونيا محمد، (2003)، " استخدام الأساليب الكمية في الإدارة"،  
قسم إدارة الأعمال، كلية التجارة – جامعة الإسكندرية.
- البكري، سونيا محمد، (2004)، "تخطيط و مراقبة الإنتاج"، قسم إدارة  
الأعمال، كلية التجارة – جامعة الإسكندرية.
- السيد، إسماعيل (1998) " استخدام الأساليب الكمية في الإدارة "   
الإسكندرية، الدار الجامعية.
- السيد، إسماعيل (2001) "الأساليب الكمية في مجال الأعمال"   
الإسكندرية، الدار الجامعية.
- العبد، جلال إبراهيم (2004) " استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ  
القرارات الإدارية" الإسكندرية، الدار الجامعية الجديدة للنشر.
- الموسوي، منعم زمزير (2010 م / 1431 هـ) " الأساليب الكمية في  
الإدارة " عمان، دار زهران للنشر والتوزيع.
- زيدان، محمد أبو العلا محمد ، (بدون سنة نشر)، " الأساليب الكمية في  
الإدارة (بحوث العمليات ) "، قسم إدارة الأعمال، كلية التجارة – جامعة  
حلوان.
- سلطان، أشرف فؤاد، (2017)، "إدارة الإنتاج والعمليات :المدخل الكمي  
المعاصر"، الإسكندرية دار فاروس العلمية للنشر.



- عبد العليم، نجاتي إبراهيم ، (بدون سنة نشر)، " بحوث العمليات في المحاسبة"، مركز جامعة بني سويف للطباعة والنشر.
- غنيم، أحمد محمد ، (2010)، " الأساليب الكمية: المفاهيم العلمية والتطبيقات الإدارية"، المنصورة، المكتبة العصرية للنشر والتوزيع.
- ماضي، محمد توفيق، (1995)، " الأساليب الكمية في مجال الإدارة"، قسم إدارة الأعمال، كلية التجارة – جامعة الإسكندرية.

### ثانياً: المراجع الأجنبية:

- Anderson, D. R., Sweeney,D,J.,Williams,T.A.,and Martin,K. (2001). **"Quantitative Methods for Business**, Eleventh Edition, South-Western Colloge Publishing.
- Anderson,D.R.,Sweeney,D,J.and illiams,T.A.(1979).**Management Science : Quantitative Approaches to Decision Making,USA :** West Publishing Co.
- Bonini,C.P.,Hausmon,W.H.,andBierman,H.(1997). **" Quantitative Analysis for Management**,Ninth Edition, London: IRWIN.
- Gass,S.(1975).**Linear Programming**,4<sup>th</sup> ed, New York: McGraw – Hill.
- Hiller,F.S., and liberman,G.J. (1980). **Introduction to Management Science**,California : Holden Day,Inc.
- Hiller,F.S., and liberman,G.J.(2005). **Introduction to Operations Research**, Eighth Edition, New York : McGraw – Hill Companies Inc.
- Render,B., and Stair,M.(1991). **Quantitative Analysis for Management**, Boston : Allyn and Bacon.
- Render,B., and Stair,M.(1992). **Introduction to Management Science**, Boston : Allyn and Bacon.
- Stevenson ,W.J.(2002). **" Operations Management"** 7<sup>th</sup>.ed, McGraw-HILL, Irwin.





[www.comm.alexu.edu.eg](http://www.comm.alexu.edu.eg) E-mail: [comr-dean@alexu.edu.eg](mailto:comr-dean@alexu.edu.eg)

كلية التجارة - مجمع العلوم الإنسانية والاجتماعية - سوتير الشاطبي - الإسكندرية

Faculty of Commerce - Human & Social Sciences Complex - Soter - Alex.

Tel & Fax: 203-4865655 Postal: 21526

2019